変形問題と余接複体

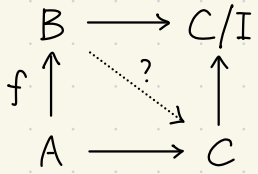
1 無限小変形の幾何

Def.

$f: A \to B$ が (0-)smooth であるとは、

任意の A代数 C と, $I^2=0$ をみたすイデアル $I \subseteq C$ に対し

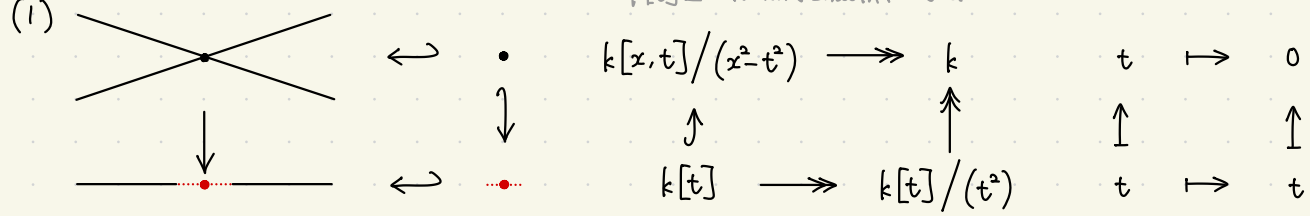
右図のリフト問題の解が1つ以上であること

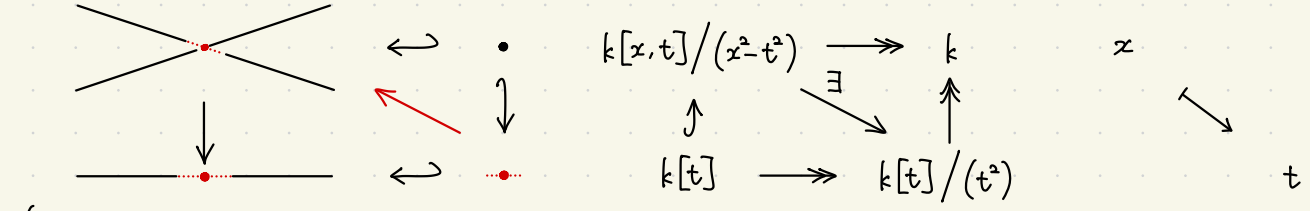


① smooth な例

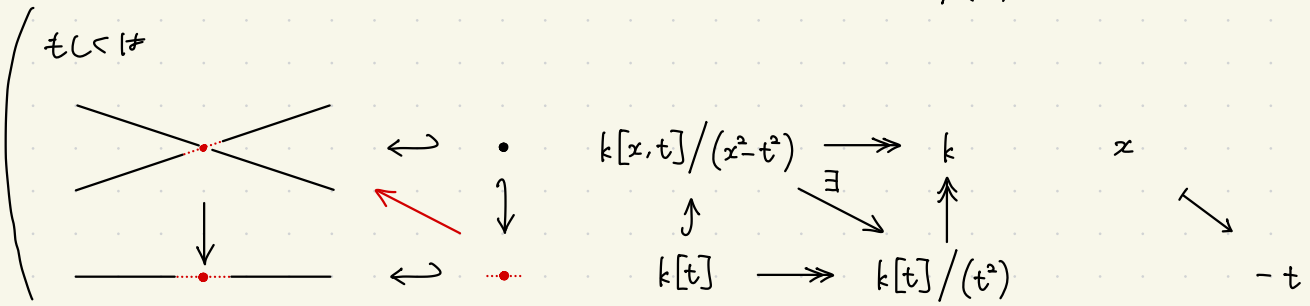
スキーム自体は k上 smooth ではないが
k[t]上では相対 smooth になる.

(1)

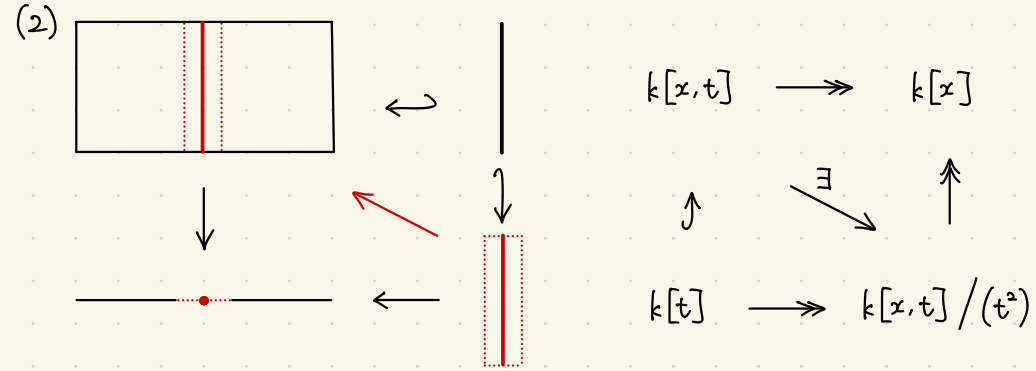




もしくは



(2)

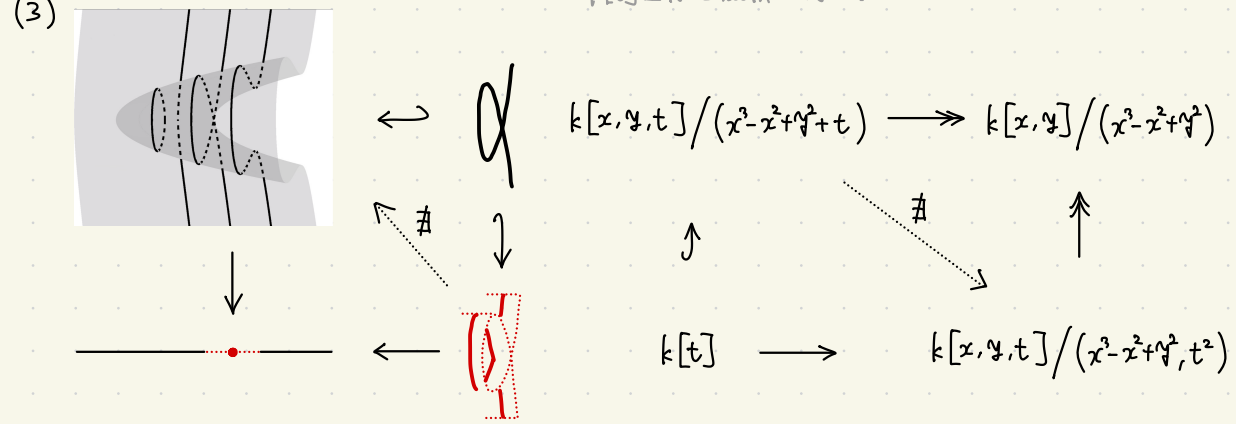


submersion的な
次元減少も OK.

② smooth でない例

スキーム自体は k上 smooth だが
k[t]上は smooth でない.

(3)

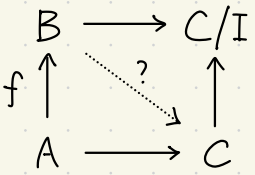


Slogan.

相対 smooth ≒ 全ファイバーが regular ≒ ファイバーを無限小変形できる.

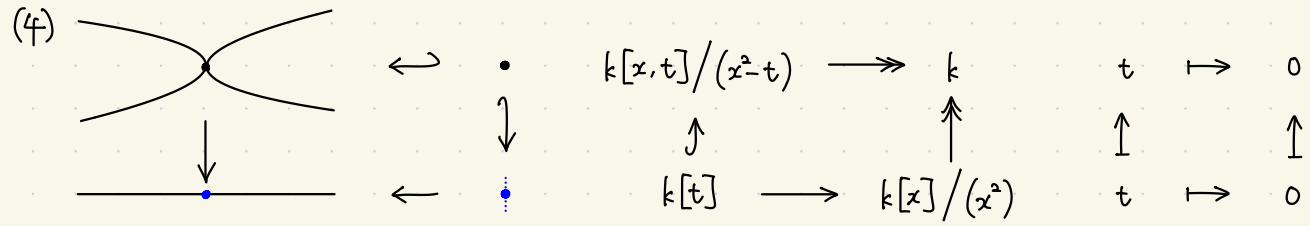
Def.

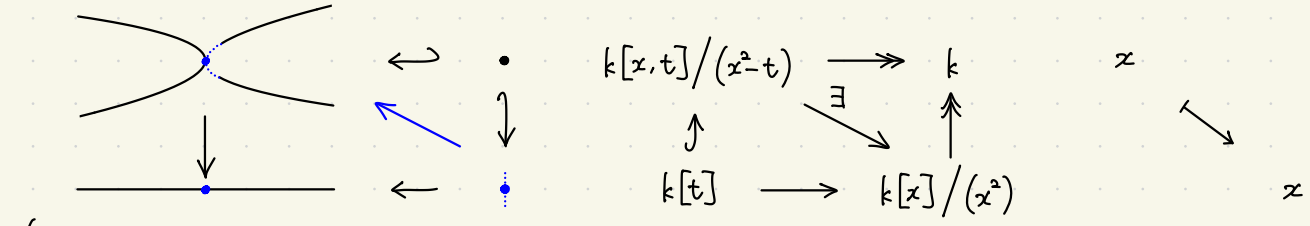
$f: A \to B$ が(0-) unramified であるとは、
任意の A代数 C と, $I^2=0$ をみたすイデアル $I \subseteq C$ に対し
右図のリフト問題の解が1つ以下であること



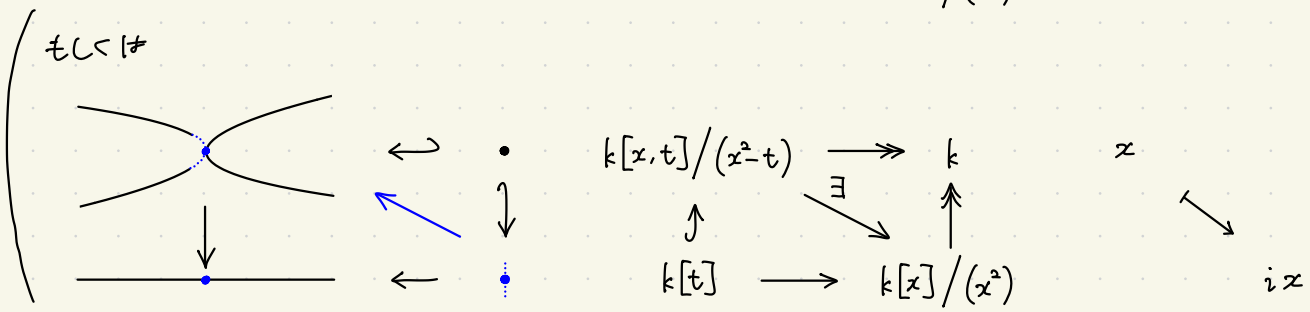
② unramifiedでない例　これはsmoothでもない.

(4)

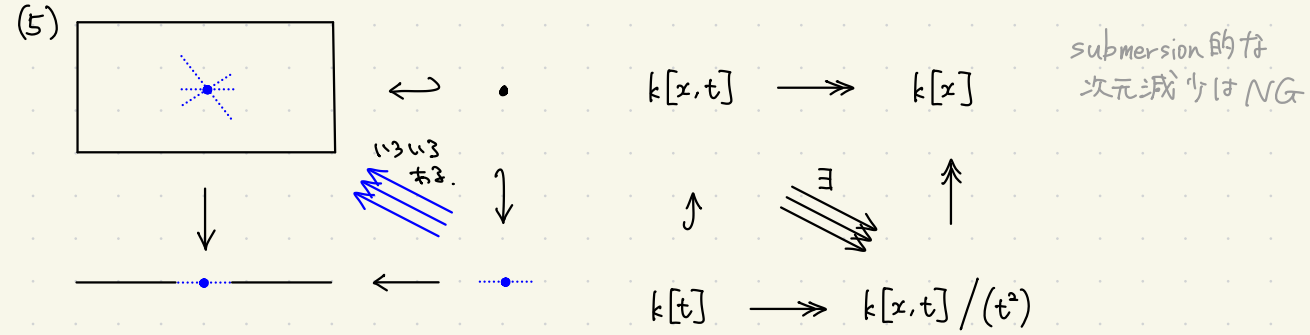




もしくは



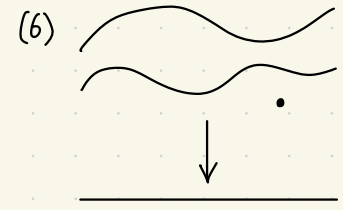
(5)



submersion的な次元減少はNG.

② unramified な例

(6)



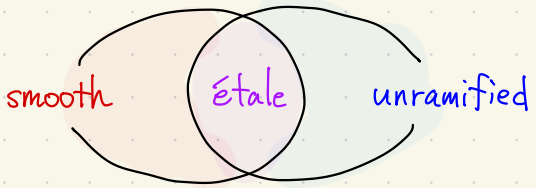
直感的な"分岐"をしていなければだいたい大丈夫.

Def.

(0-)étale $\overset{\text{def}}{\iff}$ smooth かつ unramified

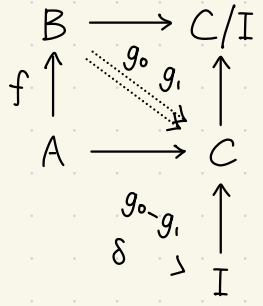
Slogan.

étale ≒ 不分岐被覆 ≒ ファイバーを一意に無限小変形できる.



2 無限小変形の代数　　f : f.p.

☆ smooth \ étale (≈ リフト問題の解が2つ以上)



g_0 : リフトの1つを fix し、これによって I を B 加群にする。

g_1 もリフトなら、$\delta := g_1 - g_0$ は I まで持ち上がる。

$$\begin{aligned}\delta(bb') &= (\delta+g_0)(b)(\delta+g_0)(b') - g_0(b)g_0(b') \\ &= g_0(b)\delta(b') + \delta(b)g_0(b') \quad (\because I^2=0 \text{ より } \delta(b)\delta(b')=0)\end{aligned}$$

より $\delta \in \mathrm{Der}_A(B, I)$.

逆にリフトが1つあれば、導分を足してもリフトになる。

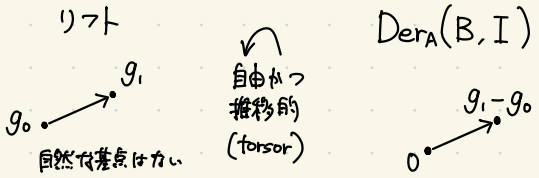
Slogan. リフトの"変更"は導分 $\mathrm{Der}_A(B,I)$.

☆ smooth ∩ unramified = étale (解が1つになるには?)

Prop. (⟺ リフトが変更できない)

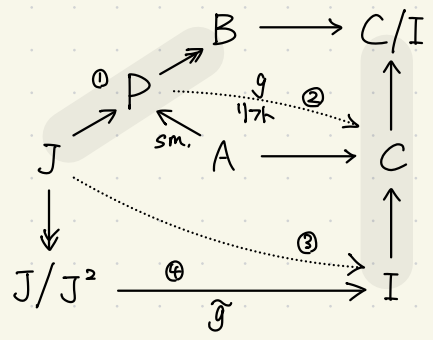
unramified ⟺ $\mathrm{Der}_A(B,-) = 0$

⟺ $\Omega_{B/A} = 0$.



基点 g_0 をとれば $\{\text{リフト}\} \cong \mathrm{Der}_A(B,I)$, $g_1 \mapsto g_1 - g_0$

☆ unramified \ étale (≈ リフト問題の解が0個)



(presentation という)

① f を $A \xrightarrow{sm.} P \xrightarrow{J} B$ に分解できる。

② sm. のところだけのリフト g を取る。

③ 2つの短完全列の間の射が誘導される。

④ $I^2=0$ より $\tilde{g}: J/J^2 \to I$ に落ちる。

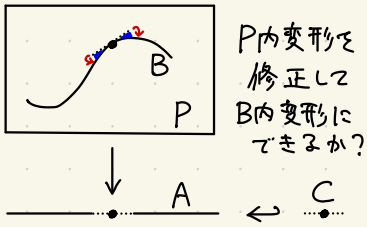
よく見ると、g がさらに $B \to C$ に持ち上がる ⟺ $\tilde{g} = 0$.

$\tilde{g}$ が持ち上がりうるかの誤差。

Slogan. リフトの"誤差"は $\mathrm{Hom}(J/J^2, I)$.

☆ unramified ∩ smooth = étale (解が1つになるには?)

Slogan. 誤差に沿って変更できるならリフトが存在する。



P内変形を修正してB内変形にできるか?

②のリフトの基点 g_0 を fix すれば、②の変更を④に反映させることで

$$\{\text{可能な変更}\} = \mathrm{Der}_A(P,I) \xrightarrow{d^\vee} \mathrm{Hom}(J/J^2, I) = \{\text{誤差}\}$$

$$\mathrm{Der}_A(P,I) = \mathrm{Hom}(\Omega_{P/A} \otimes_P B, I), \quad \delta \mapsto (g_0+\delta)\tilde{}$$

ker: {同じ変形を与える変更 = 変形の自己同型}

coker: {修正できない誤差 = 変形の障害}

Def. $NL_{B/A} = \left[\overset{0}{\Omega_{P/A} \otimes_P B} \longleftarrow \overset{-1}{J/J^2} \right]$: naive cotangent complex

(D(B) では $A \xrightarrow{f} B$ のみから定まる。)

Prop. (⟺ リフトの障害が消える)

smooth ⟺ $NL_{B/A} \overset{qis.}{\simeq} \left[\Omega_{B/A} \longleftarrow 0 \right]$ かつ $\Omega_{B/A}$: projective.

3 naive cotangent complex

◎ここまでのまとめ：無限小変形問題は，presentation $A \xrightarrow{sm.} P \xrightarrow{/J} B$ による

$$NL_{B/A} = \left[\Omega^{\circ}_{P/A} \otimes_P B \xleftarrow{d} J/J^2 \right]^{-1} : \text{naive cotangent complex}$$

の $H_1(NL_{B/A}) = \ker d$ ：障害

$H_0(NL_{B/A}) = \operatorname{coker} d = \Omega_{B/A}$ ：自己同型　に集約される．

☆特殊例での退化まとめ．

① $f : A \to B$ が smooth なとき．　（sm.のリフトをうまく使う）

presentation を $A \xrightarrow{sm.} P \xrightarrow{/J=0} B$ で取れるから　$NL_{B/A} = \left[\underset{\text{proj.}}{\Omega_{B/A}} \xleftarrow{} 0 \right]$．

② $f : A \to B$ が不分岐なとき．

$$NL_{B/A} = \left[\Omega_{P/A} \otimes_P B \xleftarrow{d} J/J^2 \right]$$
$$\Downarrow$$
$$0 = \Omega_{B/A}$$

③ $f : A \to B$ が étale なとき．(①∩②)

$$NL_{B/A} = \left[0 \xleftarrow{} 0 \right] = 0.$$

④ $f : A \twoheadrightarrow B$ が全射なとき．(閉埋込より特に不分岐)

presentation を $A = P \xrightarrow{/I} B$ で取れるから　$NL_{B/A} = \left[0 \xleftarrow{} I/I^2 \right]$．

正則列による剰余なら I/I^2 は free.

Thm. 環準同形の列 $A \to B \to C$ に対して

$$H_1(NL_{B/A}) \otimes_B C \to H_1(NL_{C/A}) \to H_1(NL_{C/B})$$
$$\to \Omega_{B/A} \otimes_B C \to \Omega_{C/A} \to \Omega_{C/B} \to 0 \quad : \text{exact}.$$

Cor.

・もし $B \to C$ が smooth なら 1次が消える & $\Omega_{C/B}$: proj.　(see①) より

$$\to \Omega_{B/A} \otimes_B C \to \Omega_{C/A} \to \underset{0}{\Omega_{C/B}} \to 0 \quad \overset{\text{split}}{:} \text{exact}.$$

・もし $B \xrightarrow{/I} C$ が全射なら 0次が消えて 1次に conormal が現れて (see④)

$$\to \Omega_{B/A} \otimes_B C \to \Omega_{C/A} \to \underset{I/I^2}{0} \quad : \text{exact}.$$

さらに $A \to B \to C$ が smooth なら 1次が消える & $\Omega_{C/A}$: proj.　(see①) より

$$0 \to I/I^2 \quad \overset{\text{split}}{:} \text{exact}.$$
$$\to \Omega_{B/A} \otimes_B C \to \Omega_{C/A} \to 0$$

4 様々な変形問題

$\mathcal{P}$ という形式の変形問題に対し、
- (Aut) $\mathcal{P}$ の元の自己同型
- (Set) $\mathcal{P}/\sim$ (同型類)
- (Obs) $\mathcal{P}\neq 0$ となるための障害

などが現れる。

① 最も簡単な例：加群の拡大　　I, B : A-mod.

$$\mathcal{P} = \left\{ 0 \to I \to \widetilde{B} \to B \to 0 \;\middle|\; \widetilde{B} : A\text{-mod} \right\}$$

(Aut)
$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & I & \to & \widetilde{B} & \to & B & \to & 0 \\ & & \| & & \downarrow u & & \| & & \\ 0 & \to & I & \to & \widetilde{B} & \to & B & \to & 0 \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{ccccccccc} & & & & B & & & & \\ & & & \swarrow & \downarrow 1-u & & & & \\ 0 & \to & I & \to & \widetilde{B} & \to & B & \to & 0 \end{array} \qquad \cong \mathrm{Ext}^0(B, I)$$

(Set)　(well-known)　$\cong \mathrm{Ext}^1(B, I)$

(Obs)　$I \oplus B$: trivial extension が常にあるから消滅。　$= 0$

② 代数の square-zero extension　　I : A-mod., B : A-alg.

$$\mathcal{P} = \left\{ 0 \to I \to \widetilde{B} \to B \to 0 \;\middle|\; \widetilde{B} : A\text{-alg.} \supseteq I : \text{sq-zero イデアル} \right\}$$

presentation $A \xrightarrow[\text{free}]{} P \twoheadrightarrow B$ を fix.

(Aut)
$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & P & & & & \\ & & & & \downarrow & & & & \\ 0 & \to & I & \to & \widetilde{B} & \to & B & \to & 0 \\ & & \| & & \downarrow u & & \| & & \\ 0 & \to & I & \to & \widetilde{B} & \to & B & \to & 0 \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{ccccccccc} & & & & \Omega_{P/A}\otimes_P B & \leftarrow & P & & \\ & & & & \downarrow & \swarrow & & & \\ 0 & \to & I & \to & \widetilde{B} & \to & B & \to & 0 \\ & & & & 1-u \downarrow & & & & \\ 0 & \to & I & \to & \widetilde{B} & \to & B & \to & 0 \end{array} \qquad \hookrightarrow \mathrm{Hom}(\Omega_{P/A}\otimes_P B, I) \xrightarrow{d^\vee} \leftarrow \mathrm{Hom}(J/J^2, I)$$

(Set)
$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & J & \hookrightarrow & P & \twoheadrightarrow & B \\ & & & & \downarrow & & & & \\ & & & & J/J^2 & & \| & & \\ & & & & \downarrow & \ulcorner & \downarrow & & \\ 0 & \to & I & \to & \widetilde{B} & \to & B & \to & 0 \end{array} \quad \leftsquigarrow \quad \begin{array}{ccccccccc} & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \\ 0 & \to & I & \to & \widetilde{B} & \to & B & \to & 0 \\ & & & & & \overset{0}{\curvearrowright} & & & \end{array}$$

(Obs)　$I \rtimes B$: idealization が常にあるから消滅。　$= 0$

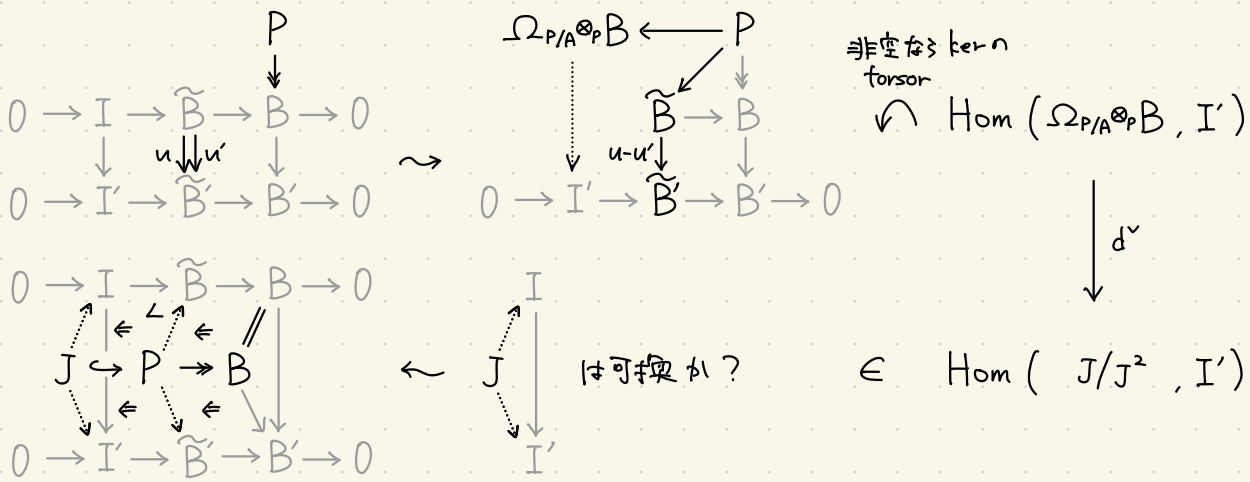
よく観察すると

$\rightsquigarrow$ (Aut) $\cong \mathrm{Ext}^0(NL_{B/A}, I)$
(Set) $\cong \mathrm{Ext}^1(NL_{B/A}, I)$
(Obs) $= 0$

③ リフト $0 \to I \to \widetilde{B} \to B \to 0$: sq-zero ext.
$0 \to I' \to \widetilde{B}' \to B' \to 0$: sq-zero ext.

$P = \left\{ \begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & I & \to & \widetilde{B} & \to & B & \to & 0 \\ & & \downarrow & & {\scriptstyle u}\downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & I' & \to & \widetilde{B}' & \to & B' & \to & 0 \end{array} \right\}$ presentation $A^{(\prime)} \xrightarrow[\text{free}]{} P^{(\prime)} \xrightarrow[/J^{(\prime)}]{} B^{(\prime)}$ を fix.

(Aut) by def で消える. $= 0$

(Set)


(Obs)

よく観察すると

↝ (Aut) $= 0$
(Set) $\curvearrowright \mathrm{Ext}^0(NL_{B/A}, I')$: 非空なる torsor.
(Obs) $\in \mathrm{Ext}^1(NL_{B/A}, I')$

⌟ ここまでは Ext^1 までしか出てこないため見かけ上うまくいっているが、
次の問題(②+③)を考えるとうまくいかないことが分かる。

④ 代数の square-zero extension に沿ったリフト

$0 \to a \to \widetilde{A} \to A \to 0$: sq-zero ext.
$\downarrow I \qquad \downarrow B$ $\quad I$: A-mod., $\quad B$: A-alg.

$P = \left\{ \begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & a & \to & \widetilde{A} & \to & A & \to & 0 \\ & & \downarrow & & {\scriptstyle u}\downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & I & \to & \widetilde{B} & \to & B & \to & 0 \end{array} \right\} \Bigg| \ \widetilde{B} : A\text{-alg.} \supseteq I : \text{sq-zero イデアル} \Bigg\}$

Thm. $L_{B/A}$: 余接複体が存在し、$NL_{B/A} \overset{\text{qis.}}{\simeq} \tau_{\geq -1} L_{B/A}$ であり.

(Aut) $\cong \mathrm{Ext}^0(NL_{B/A}, I') = \mathrm{Ext}^0(L_{B/A}, I')$
(Set) $\curvearrowright \mathrm{Ext}^1(NL_{B/A}, I) = \mathrm{Ext}^1(L_{B/A}, I)$: 非空なる torsor.
(Obs) $\in$? $\mathrm{Ext}^2(L_{B/A}, I)$

4 cotangent complex

Recall.

$sAlg_A/B = \{A \to R \to B\}$ にはモデル圏の構造が入る.

B の cofibrant replacement $A \xrightarrow{cof} P \xrightarrow[weq]{fib} B$ を取り

$L_{B/A} := \Omega_{P/A} \otimes_P B$ (もしくは Dold-Kan での対応複体) を cotangent complex という.

だいたい $R \to R[x\cdots]$ が cofibration
全射 が fibration
になっているので、cofibrant replacement $\approx$ presentation.

☆ cofibrant replacement $P_\bullet \xrightarrow{\varepsilon} B$ を構成する.

P_2 まで構成すれば H_1 まで計算できる、やってみよう　　$A[u_i]$

$$\begin{tikzcd} B \\ P_0 \arrow[u, "\varepsilon_0"] \end{tikzcd} := A[u_i]_{i\in I}$$

① $P_0 := A[u_i]_{i\in I}$

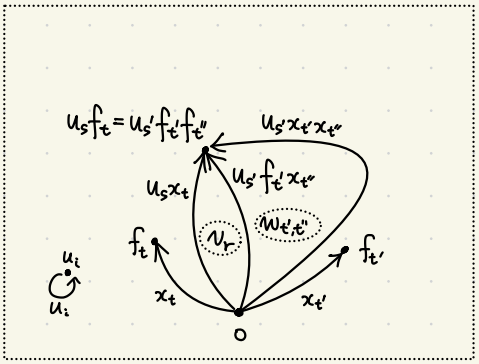
② $\mathrm{Ker}\,\varepsilon_0 = (f_t)_{t\in T}$ 核の生成元を選ぶ.

$s_0 \downarrow$ $P_1 := A[u_i, x_t]_{\substack{i\in I\\ t\in T}}$

$$\begin{tikzcd} 0 & & f_t \\ & x_t \arrow[ul, "d_0"] \arrow[ur, "d_1"'] & \end{tikzcd}$$

③ $(\mathrm{cosk}_1 P_{\le 1})_2 := \left\{ (g_0, g_1, g_2) \in P_1^3 \;\middle|\; \begin{tikzcd} d_0g_0 \arrow[r, "d_1g_0 = d_0g_2"] \arrow[d, equal] & d_1g_2 \arrow[d, equal] \\ d_0g_1 \arrow[r, "g_0\ g_1\ g_2"] & d_1g_1 \end{tikzcd} \right\}$

$\ni$ $x_t^0 := (0, x_t, x_t)$: 退化 2-simplex.
$x_t^1 := (x_t, x_t, f_t)$



r は $(u_s, u_s'f_{t'})$ という syzygy.

これに全射に入る多項式代数を作ればよい.

④ 他に必要なのは $(0,0,g)$ s.t. $g(0) = g(f_t|_{t\in T}) = 0$ i.e. $(f_t)_{t\in T}$ の P_1 内 syzygy.

・$\mathrm{Ker}\begin{pmatrix} P_0^{\oplus T} \longrightarrow P_0 \\ r = (r_t)_{t\in T} \mapsto \sum r_t f_t \end{pmatrix} = (r_l)_{l\in L}$
x_t について1次の syzygy を消す.

$$\begin{tikzcd} (\mathrm{cosk}_1 P_{\le 1})_2 \\ P_2 \arrow[u, two heads] \end{tikzcd} := A[u_i, x_t^0, x_t^1, v_l, w_{t,t'}]_{\substack{i\in I\\ t,t'\in T\\ l\in L}}$$

$(0, 0, \sum r_t x_t)$ $\uparrow$ v_l　　$(0, 0, x_t x_{t'} - f_t x_t')$ $\uparrow$ $w_{t,t'}$

x_t について2次以上の関係式の次数下げをする.

Bar construction というもっと conceptual な構成もあるが、計算はかなり厳しそう.
上の構成なら、適当な条件下で全ての P_n を有限変数多項式にできる.

例 $A = k$.

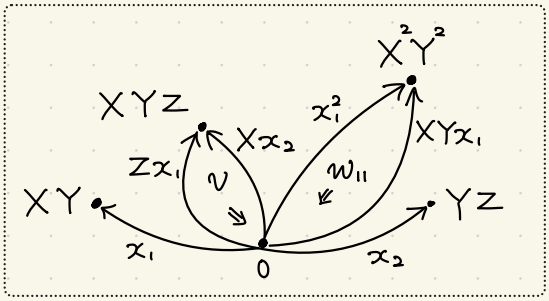
$$\begin{tikzcd} B \\ P_0 \arrow[u, "\varepsilon"] \end{tikzcd} = k[X,Y,Z]/(XY, YZ)$$

$P_0 = k[X,Y,Z]$

$s_0 \downarrow$

$P_1 = k[X,Y,Z,x_1,x_2]$

$$\begin{tikzcd} 0 & XY \\ & x_1 \arrow[ul, "d_0"] \arrow[ur, "d_1"'] \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} 0 & YZ \\ & x_2 \arrow[ul, "d_0"] \arrow[ur, "d_1"'] \end{tikzcd}$$



s_0 s_1 s_0 s_1

$$\begin{tikzcd} 0 & Zx_1 - Xx_2 \\ & \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} 0 & x_1x_j - XYx_j \\ & w_{1j} \arrow[ul, "d_{0,1}"] \arrow[ur, "d_2"'] \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} 0 & x_2x_j - YZx_j \\ & w_{2j} \arrow[ul, "d_{0,1}"] \arrow[ur, "d_2"'] \end{tikzcd}$$

$P_2 = k[X,Y,Z,x_1^0,x_1^1,x_2^0,x_2^1,v,w_{11},w_{12},w_{21},w_{22}]$

⇝ 原理的には cotangent complex を計算できるようになった. (ほんとうに?)

☆実用のための定理まとめ.

以下基本 Dold-Kan で $L_{B/A} \in D(B)$: 導来圏 とおもう.

cohomological grading を採用し、$D_q(B/A) := h^{-q}(L_{B/A})$ とおく.

Thm.

- $\tau_{\geq -1} L_{B/A} \overset{qis}{\simeq} NL_{B/A}$.
- 環準同形の列 $A \to B \to C$ に対して

$$L_{B/A} \otimes_B C \to L_{C/A} \to L_{C/B} \xrightarrow{+1} \text{: d.t.}$$

よって

$$\cdots \to D_2(C/B)$$

$$\to D_1(B/A) \otimes_B C \to D_1(B/A) \to D_1(C/B)$$

$$\to \Omega_{B/A} \otimes_B C \to \Omega_{C/A} \to \Omega_{C/B} \to 0 \quad \text{: exact.}$$

$$L_{B/A} = \left[\cdots \to L^{-2}_{B/A} \to L^{-1}_{B/A} \to L^{0}_{B/A} \to 0 \right]$$

$$\begin{array}{ccccc} & \downarrow h^{-2} & \downarrow h^{-1} & \downarrow h^{0} & \\ \cdots & D_2(B/A) & D_1(B/A) & \Omega_{B/A} & \end{array}$$

cotangent

2項複体 NL で計算できるハンイ

実は Lichtenbaum-Schlessinger complex という 3項複体があり、D_2 まで計算できる.

特別な場合での計算. $f : A \to B$ は有限表示だとする.

Thm.

- $f : A \to B$ が smooth $\iff \tau_{\leq -1} L_{B/A} \simeq 0 \iff D_{\geq 1}(B/A) = 0$.

  かつ $D_0(B/A)$ は f.g. proj. かつ $D_0(B/A)$ は f.g. proj.

- $f : A \to B$ が unramified $\iff \tau_{\geq 0} L_{B/A} \simeq 0 \iff D_0(B/A) = 0$.

よって

- $f : A \to B$ が étale $\iff L_{B/A} \simeq 0 \iff D_{\forall q}(B/A) = 0$.

Thm.

- $f : A \twoheadrightarrow B$ $/I$ が 全射 (特に unr.) $\Rightarrow D_0(B/A) = 0$, $D_1(B/A) = I/I^2$ + この場合 Quillen のスペクトル系列が $D_{\geq 2}$ の情報も与える. (cf. 前回の資料
- $f : A \twoheadrightarrow B$ $/I$ が 正則列剰余 $\Rightarrow$ 上に加え $D_{\geq 2}(B/A) = 0$

$$L_{B/A} = \left[\cdots \to L^{-2}_{B/A} \to L^{-1}_{B/A} \to L^{0}_{B/A} \to 0 \right]$$

sm. で消える

reg.imm. で消える

conormal

unr. で消える

iff étale $\simeq 0$

Thm.

- $f : A \to B$ が l.c.i. (reg.imm. ∘ sm) $\Rightarrow L_{B/A} \simeq NL_{B/A} \in D^{[-1,0]}(B)$