



<目次>

1 1 モジュライの哲学とその障害

- 1-1. 動機と理想
- 1-2. 主題と基本構成
- 1-3. 障害と妥協
- 1-4. 原因と再設定

2 (半)安定性の思想と幾何的商

- 2-1. 準備: 射影商
- 2-2. 作用に対する半安定性
- 2-3. 作用に対する安定性

3 (半)安定ベクトル束のモジュライ

- 3-1. 概観
- 3-2. ベクトル束の (slope) 安定性
- 3-3. S -同値と多重安定性
- 3-4. 諸々の約束
- 3-5. 目印付きベクトル束と Giesker 点
- 3-6. 勾配安定性と作用安定性, そのモジュライ

4 周辺の話題

- 4-1. Hitchin-小林対応 (耳学問)
- 4-2. Gieseker 安定性

5 Bridgeland 安定性

- 5-1. slope の見直しと舞台の変更, 主人公の転身
- 5-2. slicing, heart, t-structure
- 5-3. Bridgeland Stability
- 5-4. Li の結果

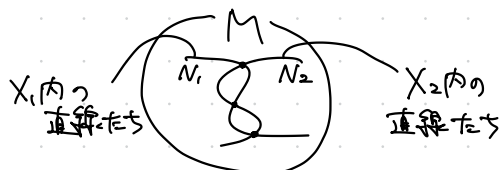
□ モジュライの哲学とその障害

1-1. 動機と理想

Thm.

2次超曲面 $X_1, X_2 \subseteq \mathbb{P}^4$ が横断的に交わることを、
交わり $X_1 \cap X_2$ にはちょうど 16本の直線が含まれる。

どのように数え上げるか？



戦略

モジュライ

交叉理論

- ① $\mathbb{P}^4$ 内の直線全体がなす多様体 M を用意する。
- ② X_1 内の直線全体がなす多様体 N_1 を求める。
 X_2 " " N_2 "
- ③ M の中で N_1 と N_2 の適切な交叉 " $N_1 \cap N_2$ " を求める。
- ④ " $N_1 \cap N_2$ " の大きさ (個数) を M 内で評価する。

informal Def.

素朴なモジュライ空間とは、多様体 X であって

$$\{X \text{ の点} \} \xleftarrow[\text{bij.}]{\text{"自然な"}} \{ \text{与えられた型の数学的対象} \} / (\text{同型})$$

となるもの。

e.g. Grassmann 多様体, Picard 多様体

k : 標数 0 の代数閉体

CAlg_k : k 上有限生成代数の圏.

Var_k : k 上代数多様体の圏. $\ni$ $\exists$ Fin $\text{Aff}_k \xrightleftharpoons[\text{Spm}]{k[-]} \text{CAlg}_k^{\text{op}}$

Def. (精密モジュライ)

$F : \text{CAlg}_k \rightarrow \text{Sets}$ が $M \in \text{Var}_k$ により表現されるとき、
 M を F の精密モジュライという.

Fact $0 < r < n$

$\text{Gr}(r, n) : \text{CAlg}_k \rightarrow \text{Sets}$: Grassmann 関手

$: R \mapsto \left\{ (M, m_1, \dots, m_n) \mid \begin{array}{l} M: \text{loc. free } R\text{-mod, } \text{rk} = r \\ m_1, \dots, m_n \notin M \text{ の生成} \end{array} \right\} / \sim$

は $\text{Gr}(r, n) : \text{proj. var. 上表現可能 (Grassmannian)}$.

特に $\text{Gr}(r, n)(k)$ を見ると,

$$\{ V \subseteq k^n \mid \dim V = r \} \xleftrightarrow{\text{bij}} \text{Gr}(r, n) \text{ (} n \text{ 点値点)}$$

戦略 (解答)

① 普遍商束 $2 \rightarrow \text{Gr}(2, 5) : \text{Grassmann 多様体}$

② $[Y] = c_3(\text{Sym}^2 2^\vee) : \text{Chern 類}$

③ $[Y]^2$: 交叉積

$$\textcircled{4} \int_{\text{Gr}(2, 5)} [Y]^2 = [Y]^2 \cap [\text{Gr}(2, 5)] = 16.$$

基本類

1-2. 主題と基本構成

モジュライの構成問題とは、商の構成問題である。

…余分な情報を付加した全体を考えてから、

同じ対象に帰着する点を潰す。



例：素朴な Grassmann 多様体の構成

$$\mathrm{Gr}(r, n) = \{ V \subseteq k^n \mid \dim V = r \} \text{ を考えたい.}$$

↑ 縦ベクトルで張られる空間

$$\mathcal{V}_{n,r} = \{ M \in \mathrm{Mat}_{(n,r)} \mid \mathrm{rk} M = r \} \hookrightarrow \mathrm{GL}(r)$$

$$\leadsto \mathrm{Gr}(r, n) = \mathcal{V}_{n,r} / \mathrm{GL}(r)$$

同じ空間を与える

素朴な商構成を考える。

$$\left(\mathrm{GL}, \mathrm{SL}, \right. \\ \left. \mathrm{GL}_m^N, \text{有限群}, \dots \right)$$

Thm. (Hilbert) $R : \text{f.g. alg.} / k$, $R \overset{\text{余}}{\curvearrowright} G : \text{reductive} \leftarrow$

$R^G : \text{f.g. alg.} / k$. i.e. 不変式環は有限生成である。

構成 (アフィン商) $\pi : X \rightarrow X/G : \text{reductive.}$

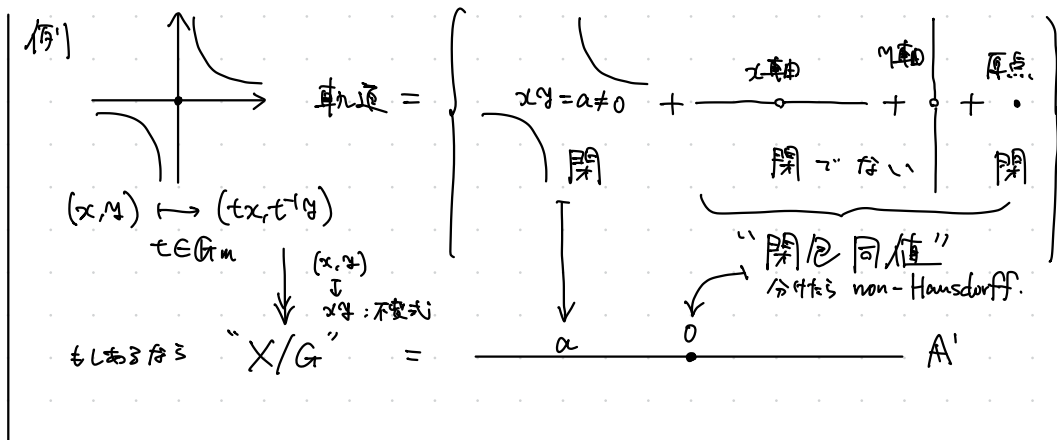
$$\circ \quad k[X] \hookleftarrow k[X]^G \quad \text{による}$$

$\Phi : X \rightarrow \mathrm{Spm} k[X]^G$ を アフィン商 という。

$k[X]^G = k[f_1, \dots, f_n]$ なさ, $(f_1, \dots, f_n) : X \rightarrow \mathbb{A}^n$ の像。

1-3. 障害と妥協

多くの場合単純な商に多様体の構造は入らない.



informal Def. (月標の印リ分け) $X \curvearrowright G$

X/G : 幾何的商 : G -軌道と bij. (代数的閉体上)

$X//G$: GIT 商 : G -軌道の開包同値類と bij.
 G -閉軌道

圏論的商 : ある種の普遍性を充足.

Thm. $\exists$ $\pi_1 : X \curvearrowright G$: reductive

$\exists$ π_1 商は GIT 商である. すなわち

$\pi_1 : X \rightarrow X//G$: $\exists$ π_1 商

の名ファイバーは μ と ν の開包同値類からなる.

Def.

G が (linearly) reductive $\Leftrightarrow \forall G\text{-hom } V \rightarrow W, V^G \rightarrow W^G : \text{surj.}$

アフィン $X \curvearrowright G$ とは, $k[X] \rightarrow k[X] \otimes k[G]$ と等価 (余作用).

$\mu : R \rightarrow R \otimes k[G]$ のとき,

$$R^G := \{f \in R \mid \mu(f) = f \otimes 1\} : \text{不変式環}$$

閉包同値 $:= \{\overline{O} \cap \overline{O'} \neq \emptyset\}$ (τ -生成士れ子) G -軌道の同値関係
 $\uparrow$ 実は不要 (永田-Mumford)

白頁部分の流れは本来逆.

Def.

$X \curvearrowright G$. $\phi : X \rightarrow Y : G$ -不変射

- ϕ が 圏論的商 $\Leftrightarrow G$ -不変射が一意に経由する.
- 幾何的商 $\Leftrightarrow \text{geom. fiber が } G\text{-軌道. } (X/G \text{ とか})$

と別て, X : アフィンのときに, 構成として

$$\circ (\text{アフィン}) \text{ GIT 商 } := X // G := \text{Spm}(k[X]^G)$$

があって, 定理として

$$X \rightarrow X // G \text{ の geom. fiber } \xleftrightarrow{\text{bij.}} G\text{-軌道の閉包同値類}$$

がある.

1-4. 原因と再設定

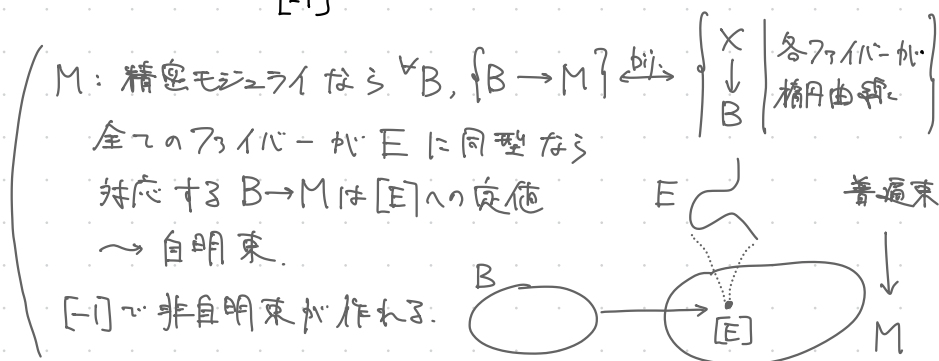
多くの場合精密モジュライは存在しない.

...手続主义的には商の構成がうまくいかなかったためだが、
冷静しようとする対象側の問題として捉え直したい.

原因

①非自明な自己同型.

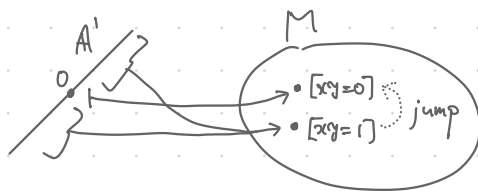
e.g. 楕円曲線の精密モジュライは存在しない.
[1]



②跳躍現象, 非分離性

e.g. 曲線の跳躍

$$\left(\begin{array}{l} A' \rightarrow M \text{ ありなり} \\ \downarrow \\ t \mapsto [xy=t] \end{array} \right.$$



informal Def. (目標の切り分け)

精密モジュライ : 目標の完全達成, 族も含めた冷静

coarse

粗モジュライ : 代数関体上での集合論的達成

最良近似

: ある種の普遍性を充足.

☆理想

① 余分な情報を
足して持ち上げる

{ 考えている対象 }

全単射

商多様体

Var_k

大きな多様体

/ 自同型

② 群作用で割る

☆妥協(A): 考える対象を少なくする.

Var_k

大きな多様体

/ 自同型

商多様体

Aut が小さい対象に
絞っておけば
商の構成に成功
するだろう.

安定
対象

{ 考える対象 }

全単射

{ 考えたかた対象 }

「考えたかた対象」の基本構成単位に絞って
分類しきれぬなら 1-9x.

→ 安定ベクトル束のモジュライなど.

☆妥協(I): 考える対象を多く(?)する.

Var_k

大きな多様体

/ 自同型

商多様体

余分な"目印"を
追加して Aut を
減らしてみよう.

(X, data) { 考える対象 }

全単射

{ 考えたかた対象 }

X

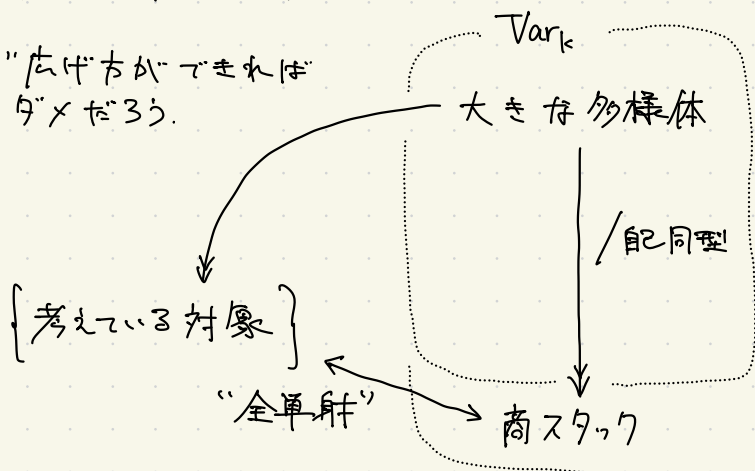
→ 偏極 (+レベル構造) 楕円曲線のモジュライ
点つき曲線のモジュライ

など.

☆妥協(ウ): "商"概念を広げる.

Stk_k
スタック

"良い"広げ方ができれば
1-ダマだろう.

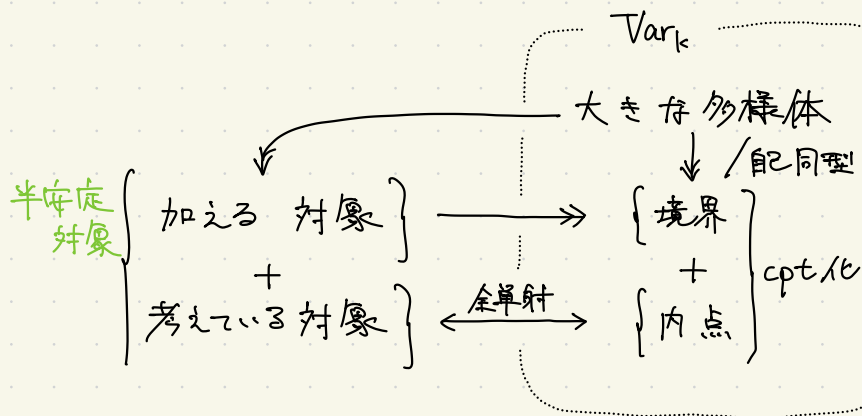


→ モジュライ **スタック**. 現代的には全てこちらで考える.

全ての情報を保持しており、むしろこちらが正しい.

商多様体はcptであってほしい.

☆妥協(エ): 境界においては全単射を諦める.



→ **半安定** 曲面/ベクトル束のモジュライ など.

Deligne-Mumford コンパクト化

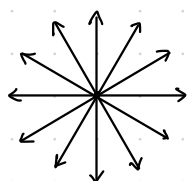
2 (半)安定性の思想と幾何的商

X : アフィン
 G : reductive.

2-1. 準備: 射影商

... 商構成を射影的に(大域的に)行う.

例 (アフィン商では不足な例)



$A^2 \curvearrowright G_m$. • 全ての軌道は閉包同値なので

$$A^2 // G_m = \{\text{pt}\}$$

$A^2 - \{0\} \curvearrowright G_m$. • 作用先がアフィンでない.

$\cup \begin{matrix} A^2 - \{x=0\} \\ A^2 - \{y=0\} \end{matrix} \curvearrowright G_m$. • 貼り合わせて $A^2 \rightarrow \mathbb{P}^1$ を得る.
 $\rightarrow$ これを ad-hoc に無して構成したい.

構成 (射影商)

$X \curvearrowright G$ だけでなく, $G \xrightarrow[\neq 1]{\chi} G_m$ を指定する.

すると, 次級つぎ環の構造

$$k[X]^{\text{Ker } \chi} = \bigoplus_{m \geq 0} (\text{重み } \chi^m \text{ の半不変式})$$

が入るので,

$$k[X][t] \leftarrow k[X]^{\text{Ker } \chi}$$

$X \rightarrow \text{Proj } k[X]^{\text{Ker } \chi}$: 有理写像が得られる.

!!

$X //_{\chi} G$: (χ 方向の) 射影商

先の例から, これは $X - \{\text{悪い点}\}$ 上で良い商として機能しているはず.

2-2. 作用に対する半安定性

直感的には, $f_0, \dots, f_N$: 同じ重みの不変式をたくさん用意し,

$$\begin{aligned} [f_0, \dots, f_N] : X &\longrightarrow \mathbb{P}^N \quad \text{の像を射影商としたい} \\ \downarrow & \quad \downarrow \\ x &\mapsto [f_0(x), \dots, f_N(x)] \quad \left(\text{アフィン商の構成を参照} \right) \end{aligned}$$

Def. $X \cap G \xrightarrow{\pi} G_m$.

$x \in X$ が semi stable $\iff \exists f: \text{重み } \chi \text{ の不変式, } f(x) \neq 0$

$$\text{よって } X \longrightarrow X //_{\chi} G$$

開U

Φ_x : 射影商射がある.

X_{χ}^{ss} : 半安定点全体

$\uparrow$ アフィン商射

$\geq$ アフィン-local には

Thm. (半安定性)

射影商は GIT 商である. すなわち各ファイバーは
ひとつの 半安定 開包同値類からなる.

例

$$\circ A^{n+1} \curvearrowright G_m \xrightarrow{\text{id}} G_m$$

$$(A^{n+1})_{\text{id}}^{ss} = A^{n+1} - \{0\} \xrightarrow{\text{proj}} \mathbb{P}^n \quad \text{よって } \mathbb{P}^n = A^{n+1} //_{\text{id}} G_m$$

$$\circ \text{Mat}_{(n,r)} \curvearrowright GL(r) \xrightarrow{\det} G_m \quad \text{Plücker 埋め込み}$$

$$\text{Mat}_{(n,r), \det}^{ss} = \{ \text{rk} = r \} = \mathcal{U}_{n,r} \xrightarrow{\text{proj}} \text{Gr}(r,n) \quad \text{よって}$$

$$\text{Gr}(r,n) = \text{Mat}_{(n,r)} //_{\det} GL(r) : \text{Grassmann 多様体.}$$

2-3. 作用に対する安定性

Def. $X \curvearrowright G \xrightarrow{\chi} G_m$.

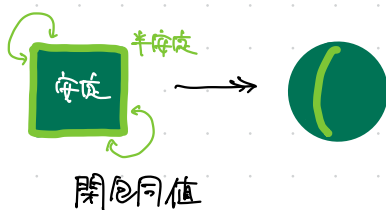
$x \in X$ が ^{stable}安定 $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ 半安定, $G \cdot x \subseteq^{\text{cl.}} X^{ss}$, $\text{Stab}(x)$: 有限
 $\left(\begin{array}{l} \chi=1 \text{ なら} \\ \iff \end{array} \right. \psi_x: G \xrightarrow{\cdot x} X \text{ が proper} \left. \right)$

Thm. (安定性)

射影商の安定点への制限は幾何的商である. すなわち

$X_{\chi}^{ss} \longrightarrow X //_{\chi} G$: 射影商 $\stackrel{\text{bij.}}{\longleftrightarrow} \{ \text{半安定軌道} \} / \text{閉包同値}$
 開 U 開 U

$X_{\chi}^s \longrightarrow X^s //_{\chi} G$: 幾何的商 $\stackrel{\text{bij.}}{\longleftrightarrow} \{ \text{安定軌道} \}$

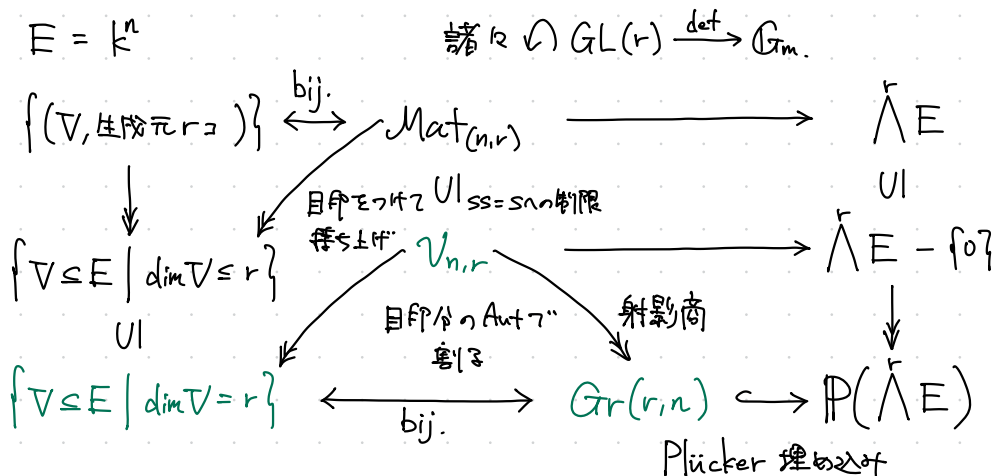


安定部分の幾何的商を
半安定部分で“閉じ込め”

3 (半)安定ベクトル束のモジュライ C : 滑らかな曲線

3-1. 概観

まず Grassmann 多様体の実現 (Plücker 埋め込み) を見直す.

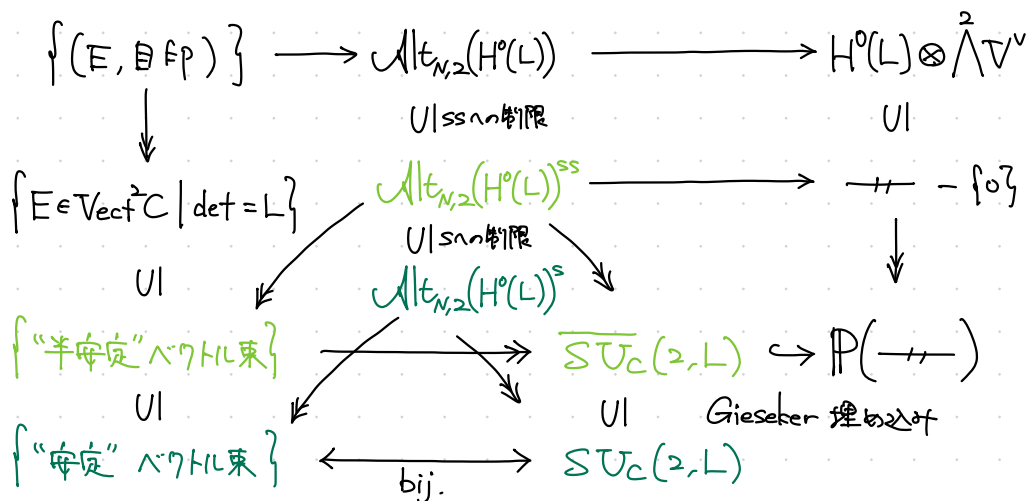


真似る.

C : curve genus = g . $L \in Pic^{2g-2} C$, $N = \deg L + 2 - 2g$

$V = k^N$

 $\text{諸々 } \hookrightarrow GL(r) \xrightarrow{\det} G_m.$



3-2. ベクトル束の (slope) 安定性

Def. E : ベクトル束

$$\mu(E) = \frac{\deg E}{\operatorname{rk} E} \quad \Sigma \quad E \text{ の 勾配 (slope) という.}$$

$$\begin{aligned} E \text{ が (勾配) 半安定} &\iff \forall_0 \neq F \subsetneq E, \quad \mu(F) \leq \mu(E) \\ \text{安定} &\iff < \end{aligned}$$

Thm. (Harder-Narasimhan filtration) C : 曲線

任意のベクトル束 E に対し, フィルトレーション

$$0 = E_0 \leq E_1 \leq \dots \leq E_n = E$$

であって以下を満たすものが一意に存在する.

◦ 各 E_{i+1}/E_i は 半安定.

$$\circ \mu(E_1/E_0) > \dots > \mu(E_n/E_{n-1}).$$

Thm. (Jordan-Hölder filtration) C : 曲線

任意の 半安定 ベクトル束 E に対し, フィルトレーション

$$0 = E_0 \leq E_1 \leq \dots \leq E_n = E$$

であって以下を満たすものが存在する.

◦ 各 E_{i+1}/E_i は 安定.

$$\circ \mu(E_1/E_0) = \dots = \mu(E_n/E_{n-1}).$$

さらに各 E_{i+1}/E_i は 互いかに互を除き一意.

よって 安定ベクトル束の分類が重要である!

3-3. S-同値と多重安定性

半安定だが安定でない階数2のベクトル束について考える.

Def. $E : ss \setminus s, rk=2, \text{ on } C.$

$$\circ \text{gr } E := L \oplus (E/L) \quad \left(\deg L = \frac{\deg E}{2} \text{ for } L \subseteq E. \right)$$

これは E から up to iso で定まる.

$$\circ E \sim E' \text{ は } S\text{-同値} \iff \text{gr } E \cong \text{gr } E'.$$

$$\circ E \text{ は } \text{polystable} \iff E \text{ は安定束の直和.}$$

よって S-同値類は唯一の多重安定束を含む.

3-4. 諸々の約束.

◦ C : 滑らかな曲線, 種数 g

◦ L : C 上の直線束, $\deg L \geq 4g-2$

$$\circ N = \deg L + 2 - 2g.$$

◦ E : C 上の $rk=2$ ベクトル束, $\det = L$

このとき $\begin{matrix} h^1 E = 0 \\ h^0 E = N \end{matrix}$ $\rightarrow E$ は大域切断で生成される.

$$\circ \text{Alt}_N(H^0(L)) = \left\{ H^0(L) \text{- 成分 } N \text{ 次歪対称行列} \right\}$$

$$\circ \text{Alt}_{N,2}(H^0(L)) = \left\{ \text{ランク} \leq 2 \right\}$$

3-5. 目印付きベクトル束と Giesker 点

構成

- E と $\{s_1, \dots, s_N \in H^0(E) : \text{線形独立}\}$ の組を
目印付きベクトル束と呼ぶ。
- $(E, S = \{s_1, \dots, s_N\})$ を目印付きベクトル束とすると、
 N 次歪対称行列 $T_{E,S} = (s_i \wedge s_j)_{ij} \in \text{Alt}_{N,2}(H^0(L))$
をその **Giesker 点** という。
- $T \in \text{Alt}_{N,2}(H^0(L))$ に対し $E_T := \text{Im}(\mathcal{O}_C^{\oplus N} \xrightarrow{T} L^{\oplus N})$
 $S_T := \text{Im}(H^0(\mathcal{O}_C^{\oplus N}) \rightarrow H^0(E_T))$
- $\text{Alt}_N(H^0(L))$ に $T \mapsto XT^tX$ で $GL(N)$ が作用する。

$$\begin{array}{ccc}
 \circ \{ (E, \text{目印}) \} & \xrightarrow{T} & \text{Alt}_{N,2}(H^0(L)) \quad (E, S) \mapsto T_{E,S} \\
 \downarrow & & \downarrow E \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \downarrow \\
 \{ E \in \text{Vect}^2 C \mid \det = L \} & \subseteq & \text{Vect}^2 C. \qquad E \xrightarrow{\text{Thm.}} E_{T_{E,S}}
 \end{array}$$

- $T \in \text{Alt}_{N,2}(H^0(L))$ が作用半安定ならば $\det \widetilde{T} = L$.

よって T は (E_T, S_T) の Giesker 点。

3-6. 勾配安定性と作用安定性, そのモジュライ

Thm. (勾配安定性と作用安定性)

- E が勾配 **半安定** $\iff$ その Gieseker 点 が 作用 **半安定**.
- E が勾配 **安定** $\iff$ その Gieseker 点 が 作用 **安定**.

- $\deg L$ が奇数なら 2 行は同値であり, 射影高は幾何的商.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{安定ベクトル束} \\ \text{rk}=2, \det=L \end{array} \right\} \xleftrightarrow{\text{bij.}} \mathcal{M}_{N,2}(H^0(L)) /_{\det} GL(N) =: SU_c(2, L)$$

: 射影多様体

これは
 $SU_c(2, L): A \mapsto \{ \mathcal{E} \in \text{Vect}^2 C_A \mid \forall t \in \text{Spm } A, \mathcal{E}|_{C_A(t)} \text{ は安定} \}$
 の粗モジュライである.

- $\deg L$ が偶数なら, $ss \setminus S$ において

E, E' が S -同値 $\iff$ その Gieseker 点 が 閉包同値.

であり.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{安定ベクトル束} \\ \text{rk}=2, \det=L \end{array} \right\} \xleftrightarrow{\text{bij.}} \mathcal{M}_{N,2}(H^0(L))^S /_{\det} GL(N) =: SU_c(2, L)$$

$$+ \qquad \qquad \qquad +$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{半安定} \setminus \text{安定} \\ \text{rk}=2, \det=L \end{array} \right\} \longrightarrow \text{境界 (Kummer 多様体)} \xleftarrow[\text{射影}]{\text{Pic}^{\deg/2} C}$$

$\downarrow /S\text{-同値}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{多重安定ベクトル束} \\ \text{rk}=2, \det=L \end{array} \right\} \xleftrightarrow{\text{bij.}} \mathcal{M}_{N,2}(H^0(L)) //_{\det} GL(N) =: \overline{SU}_c(2, L)$$

: 射影多様体

4 周辺の話題

4-1. Hitchin-小林対応 (耳学問)

☆ 安定性は、モジュライのための技術的便宜以上の意味を持つ。

Thm. (Hitchin-小林対応) $k = \mathbb{C}$, γ あり

C : cpt. Riemann 面, E : C 上の hol. vect. bdl. のとき、

E が slope polystable $\iff E$ は Hermite-Einstein 計量を持つ

4-2. Gieseker 安定性

☆ slope 安定性を任意次元の連接層に拡張したい。

→ Hilbert 多項式を用いる。

X : proj./ k . $\mathcal{O}(1)$: ample line bdl. を fix. $\mathcal{F}$: coh. on X .

$$p(\mathcal{F}, m) = \frac{P(\mathcal{F}, m)}{\deg \mathcal{F}} : \text{Hilb. poly.} \quad ; \text{ reduced Hilb. poly.}$$

Def. (Gieseker stability) $\text{Ass } \mathcal{F}$ が eq-dim.

$\mathcal{F}$ が (semi)stable $\iff \mathcal{F}$: 純かつ $\forall \mathcal{E} \subsetneq \mathcal{F}, p(\mathcal{E}) < p(\mathcal{F})$.

この意味でも HN, JH filtration は存在する。

slope-stable $\Rightarrow$ Gieseker-stable

$\Downarrow$

slope-semistable $\Leftarrow$ Gieseker-semistable

5 Bridgeland 安定性.

5-1. slope の見直し と 舞台の変更, 主人公の反転

$$\star \mu(E) = \frac{\deg E}{\operatorname{rk} E} \quad \begin{array}{l} \text{slope} \\ \text{勾配} \end{array} \in \mathbb{R}$$

$$\downarrow$$

$$Z(E) = -\deg E + i \cdot \operatorname{rk} E \quad \begin{array}{l} \text{central charge} \\ \text{中心電荷} \end{array} \in \mathbb{C}$$

phase 位相
φ

→ 加法性が成り立つようになる.

$$\text{i.e. } 0 \rightarrow E_1 \rightarrow E_2 \rightarrow E_3 \rightarrow 0 : \text{ex.}$$

$$\Rightarrow Z(E_2) = Z(E_1) + Z(E_3).$$

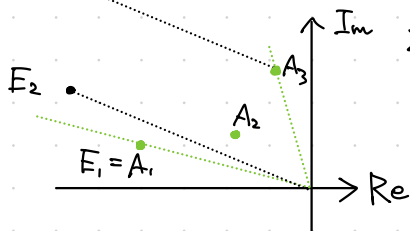
→ Grothendieck 群から $\mathbb{C}$ への加法環同型 になる!

★ HN filtration

$$\text{e.g. } 0 \subseteq E_1 \subseteq E_2 \subseteq E_3 = E$$

$$\underbrace{A_1} \quad \underbrace{A_2} \quad \underbrace{A_3} : \text{ss factor}$$

$$E = E_3$$



$$Z(E) = Z(A_1) + Z(A_2) + Z(A_3)$$

・ 補題 : $\circ \mathcal{P}_\theta = \{ \text{ss, phase} = \theta \}$ は 全部 Abelian 圏.

$$\circ \theta > \theta' \text{ ならば } \operatorname{Hom}(\mathcal{P}_\theta, \mathcal{P}_{\theta'}) = 0.$$

→ このような filtration と Z の組を "stability" と呼ぶたい.

5-2. slicing, heart, t-structure

Def. $\mathcal{T}$: 三角圏. $\leftarrow$ だいたいお祭りの複体の圏を思えばよい.

以下をみたす $\mathcal{P} = (\mathcal{P}_\theta)_{\theta \in \mathbb{R}}$ を $\mathcal{T}$ の **slicing** という.

(a) $\mathcal{P}_\theta$ は $\mathcal{T}$ の full add. subcat. かつ $\mathcal{P}_\theta[1] = \mathcal{P}_{\theta+1}$.

(b) $\theta_1 > \theta_2$ ならば $\text{Hom}(\mathcal{P}_{\theta_1}, \mathcal{P}_{\theta_2}) = 0$

(c) $\forall 0 \neq E \in \mathcal{T}$, 以下の d.t. 列が存在.

$$0 = E_0 \rightarrow E_1 \rightarrow E_2 \rightarrow \cdots \rightarrow E_{m-1} \rightarrow E_m = E$$

$$\begin{array}{ccccccc} & \nearrow +1 & & \searrow & \nearrow +1 & & \searrow \\ & A_1 & & A_2 & & & A_m \end{array}$$

だいたい
 $\leftarrow \text{Ker} = \text{Coker}$ のこと

$$\text{w/ } A_i = \text{Cone}(E_{i-1} \rightarrow E_i) \in \mathcal{P}_{\theta_i}, \theta_1 > \cdots > \theta_m.$$

(定義をみれば (c) は一意であり). HN filtration を呼ぶ.

これは三角圏の heart 概念の離散化をみせす.

Lem. $\mathcal{T}$: 三角圏.

以下をみたす $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{T}$: full add. subcat. がある有限 t-structure の heart ならば

(b') $n > m$ ならば $\text{Hom}(\mathcal{A}[n], \mathcal{A}[m]) = 0$.

(c') $\forall 0 \neq E \in \mathcal{T}$, 以下の d.t. 列が存在.

$$0 = E_0 \rightarrow E_1 \rightarrow E_2 \rightarrow \cdots \rightarrow E_{m-1} \rightarrow E_m = E$$

$$\begin{array}{ccccccc} & \nearrow +1 & & \searrow & \nearrow +1 & & \searrow \\ & A_1 & & A_2 & & & A_m \end{array}$$

$$\text{w/ } A_i = \text{Cone}(E_{i-1} \rightarrow E_i) \in \mathcal{A}[n_i], n_1 > \cdots > n_m.$$

と同値.

$\hookrightarrow$ 直感的には複体を下から切り出しているだけ.

5-3. Bridgeland Stability

Def. (Bridgeland Stability)

- 以下をみたす $\sigma = (\mathcal{P}, Z) \in \mathcal{T}$ の **Bridgeland pre-stability** といふ。
 - $\mathcal{P}$ は $\mathcal{T}$ の slicing.
 - $Z: K_0(\mathcal{T}) \rightarrow \mathbb{C}$ は 群環同型で (central charge といふ),
 $E \in \mathcal{P}_0$ ならば $Z(E) \in \mathbb{R}_{>0} \cdot e^{i\pi\theta}$ となるもの.
- さらに central charge がある $K_0(\mathcal{T}) \xrightarrow{\nu} \Lambda$: 格子を経由し
ある種の 有界性 をみたすとき **Bridgeland stability** とふふ.
support property
- それ全体を $\text{Stab}_{\Lambda, \nu}(\mathcal{T})$ で表す.

★ Stability の slicing は 各々の $\mathcal{P}_0$ が 自動的に Abel 圏になる!

また Jordan-Hölder filtration の存在も示すことができる.

★ $\{\text{pre-stability}\} \xleftrightarrow{\text{bij.}} \{\text{有界 t-structure} + K(\text{heart}) \rightarrow H \mid H_N\}$

Thm. (Bridgeland's Deformation Theorem)

$\text{Stab}_{\Lambda, \nu}(\mathcal{T})$ には 自然な (一般化距離に依る) 位相が入り,

$$\text{Forg}: \text{Stab}_{\Lambda, \nu}(\mathcal{T}) \longrightarrow \text{Hom}(\Lambda, \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^{\text{rk } \Lambda}$$

は local homeo である.

よって, $\text{Stab}_{\Lambda, \nu}(\mathcal{T})$ は $\text{rk } \Lambda$ 次元複素多様体になる.

この幾何 (壁越えなど) を理解することは Donaldson-Thomas 理論
(Calabi-Yau 3-fold の量子不変量の理論) でも大々らしい.

5-4 Liの結果

Q. そもそもそんなものあるのか?

A.

Thm. [Li, 2026]

◦ 滑らかな射影多様体/ $\mathbb{C}$ 上には
Bridgeland stability condition が存在する.

☆ 正確には, 連接層の有限導来圏 $D^b(\text{Coh}(X))$ 上.

< 戦略. >

① 楕円曲線の n 重直積 E^n 上には
stab. が存在.

② 2重分岐被覆 $E \rightarrow \mathbb{P}^1$ に沿って“押し出し”,
 $(\mathbb{P}^1)^n$ 上に stab. を構成.

③ 商 $(\mathbb{P}^1)^n / S_n \rightarrow \mathbb{P}^n$ に沿って“押し出し”,
 $\mathbb{P}^n$ 上に stab. を構成.

④ 閉埋込 $X \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ に沿って“引き戻し”,
 X 上に stab. を構成.

$$\begin{array}{ccc} E^n & \xrightarrow{\textcircled{2}} & (\mathbb{P}^1)^n \\ \textcircled{1} & & \downarrow \textcircled{3} \\ X & \xrightarrow{\textcircled{4}} & \mathbb{P}^n \end{array}$$

[参考文献]

メイン。向井 茂, 「モジュライ理論」I, II

<https://www.iwanami.co.jp/book/b475882.html>

<https://www.iwanami.co.jp/book/b480130.html>

①②③ はほぼこれ.

代数的幾何とこの理論入門付き. 超絶親切名著
前提知識なし. 数論方向の例示もあり今すぐ読め

サブ。Huybrechts, Lehn. "The Geometry of Moduli Spaces of Sheaves"

<https://ncatlab.org/nlab/files/HuybrechtsLehn.pdf>

③のHN, JH filt.
(直 pdf) ④のGieseker stab.

オススしている人をよく見た. 前提は代数幾何, 特に連接層.
安定性について代数幾何側の教科書. (三角圏不要)

一般次元でやっているのだから技術的にハードだから
slope / Gieseker stab. のことはだいたい書いてある.

。 Bridgeland. "Stability Conditions on Triangulated Categories"

<https://arxiv.org/abs/math/0212237>

⑤全般.

Bridgeland Stability の元論文. あちやふかりやすい.

前提は三角圏論だが、導来圏での代数幾何と
言った方が正しいと思う. deformation thm. の証明はけつなく
物理側との接続も軽く書いてある. 安定性の def は
現在と少し異なり. support prop. は後に

Kontsevich-Soibelman で導入されたらしい. JH に必要.

<https://arxiv.org/abs/0811.2435>

- Huybrechts, "Introduction to Stability Conditions"

<https://arxiv.org/abs/1111.1745>

㊦ 全般

Bridgeland Stability の解説. マジで分かりやすい.
slope 安定性 から始めて Abel 圏上の安定性,
 t -structure との関係から Bridgeland stability に入る
流れる 図も多く分かりやすい. 前提は三角圏論,
後半は曲面上などで実際に幾何をやっている代数的幾何.

- Li. "A Remark on Stability Conditions on Smooth Projective Varieties"

<https://arxiv.org/abs/2601.22994>

㊦ 後半.

「Li の結果」で示した定理の論文. 引用文献の
結果に踏み込まなければ, 基本的な連接層の
導来圏論で読めそう. また, 基本的な定義が
Introduction にまとまっているのでそこを参考にした.

その他, 池田岳. 「教え上げ幾何学講義 ショーベルト・カネコウス入門」

<https://www.utp.or.jp/book/b370990.html>

冒頭の教え上げの話.

- 上原, 戸田 「連接層の導来圏と代数的幾何学」

<https://www.maruzen-publishing.co.jp/book/b10136787.html>

DT, wall-cross. あたり

大量のトビウロが載っている. 貴重な和書.

- Huybrechts. "Fourier-Mukai Transforms in Algebraic Geometry"

<https://academic.oup.com/book/11573>

$D^b(\text{Coh}(X))$ の教科書.