〈目次〉

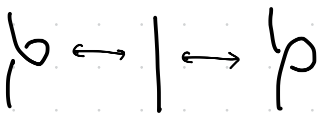
1 結び目とその不変量

〈1. 用語と Reidemeister の定理〉

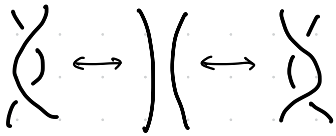
Thm. (Reidemeister の定理)

同値な結び目の正則射影図は、以下の3つの変形の組み合わせで互いにうつりかわることができる。

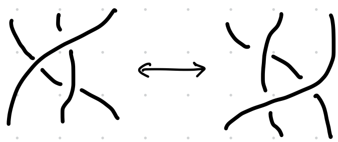
- RI



- RII



- RIII



これらを Reidemeister 変形という。

〈2. 3彩色数〉

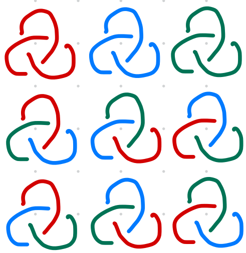
Def. (3彩色数)

○結び目の射影図を赤,青,緑に塗り分けたもののうち,

＊各交点のまわりの3つの線が,全て同じ色か,全て違う色

をみたすものの個数を,3彩色数という.

例



三葉結び目は9つ.

自明な結び目は3つ.

Cor. よって三葉結び目は自明でない.

Thm. 3彩色数は結び目の不変量である.

∵ Reidemeister移動で不変であることが確認できる. □

Rmk.

○射影図Kの3彩色数Z(K)は,以下のように表示できる.

$$Z(K)=\sum_{s:\text{Kの塗り方}}\ \prod_{c:\text{Kの交点}} W_c(s)$$

ただし

$$W_c(s)=\begin{cases}1 & \text{if cのまわりの線が全て同じ色か全て違う色}\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

○この式の形(状態和)は物理で現れるらしい.

$$Z(K)=\sum_{s:\text{スピンの状態}}\ \prod_{i:\text{原子}} \underbrace{\exp\left(-\frac{E_i(s)}{kT}\right)}_{\text{Boltzmannの重み?}}$$

〈3. Jones 多項式〉

Prop-Def.（Jones 多項式）　　t：不定元

◦ 結び目に対し $t^{\frac{1}{2}}$ の Laurent 多項式を与える写像 $K \mapsto V_K(t)$ であって、

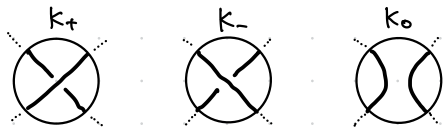
以下の (1)(2) を満たすものが一意に存在する。

(1) 自明な結び目 ○ に対して $V_{\bigcirc}(t) = 1$.　　　（正規化）

(2) 任意の結び目 K に対し

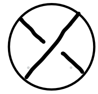
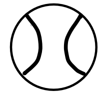
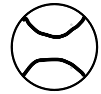
$$tV_{K_+}(t) - t^{-1}V_{K_-}(t) = -\left(t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}\right)V_{K_0}(t)$$　　（skein（もつれ）関係式）

ただし

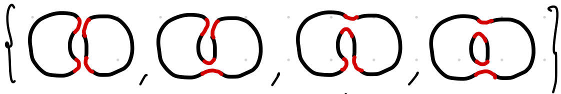


◦ これを **Jones 多項式** という。

〈4. Kauffman の状態和〉

- 射影図Kに対し、Kの各交点  を  か  に対応させた図は"Kの状態"であるという。
- 状態 s に対し. $d(s) = (s$ の成分数$)$ とする。

例 $K =$  : Hopf 結び目の図 なら

Kの状態 $=$  : 4つ.

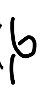
d … 2, 1, 1, 2

Def. (Kauffman の状態和) A : 不定元

- $$\langle K \rangle = \sum_{s:\text{Kの状態}} (-A^2 - A^{-2})^{d(s)-1} \prod_{c:\text{Kの交点}} W_c(s)$$

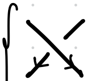
ただし $W_c(s) = \begin{cases} A & \text{if 状態 s で交点 c が} \\ A^{-1} & \text{if 状態 s で交点 c が} \end{cases}$  

Prop.

- $\langle$  $\rangle = (-A^3) \langle \, | \, \rangle$, $\langle$  $\rangle = (-A^{-3}) \langle \, | \, \rangle$
- RII, RIII で $\langle \cdot \rangle$ は不変.

Def. (ねじり数)

- K : 向きつけられた結び目の射影図 に対し.

$w(K) = \#\{$  $\} - \#\{$  $\}$ を **ねじれ数** という.

Thm. (Jones 多項式と Kauffman の状態和の等価性)

$$V_K(A^4) = (-A^3)^{-w(K)} \langle K \rangle$$

〈5. Alexander 多項式〉

Prop-Def.(Alexander 多項式)　　z : 不定元

・結び目に対し z の多項式を与える写像 $K \mapsto \nabla_K(z)$ であって、以下の(1)(2)を満たすものが一意に存在する。

(1) 自明な結び目 ○ に対して $\nabla_{\bigcirc}(z) = 1$.　　(正規化)

(2) 任意の結び目 K に対し

$$\nabla_{K_+}(z) - \nabla_{K_-}(z) = z\nabla_{K_0}(z)$$

(skein(もつれ) 関係式)

・これを Alexander 多項式という。

〈HOMFLY 多項式〉　V, ∇ の共通の一般化(2変数化)

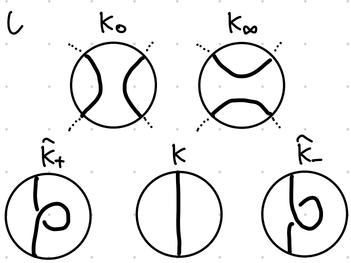
$$\begin{cases} tV_{K_+}(t) - t^{-1}V_{K_-}(t) = -(t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})V_{K_0}(t) & : \text{Jones 多項式} \\ \nabla_{K_+}(z) - \nabla_{K_-}(z) = z\nabla_{K_0}(z) & : \text{Alexander 多項式} \end{cases}$$

$$\to\ a^{-1}P_{K_+}(a,x) - aP_{K_-}(a,x) = xP_{K_0}(a,x)\quad : \text{HOMFLY 多項式}$$

〈Kauffman 多項式〉　V の一般化(2変数化)

$$\begin{cases} D_{K_+}(a,x) + D_{K_-}(a,x) = x\left(D_{K_0}(a,x) + D_{K_\infty}(a,x)\right) \\ D_{\hat{K}_+}(a,x) = a\,D_K(a,x) \\ D_{\hat{K}_-}(a,x) = a^{-1}D_K(a,x) \\ D_{\bigcirc}(a,x) = 1 \end{cases}$$

ただし



とし、

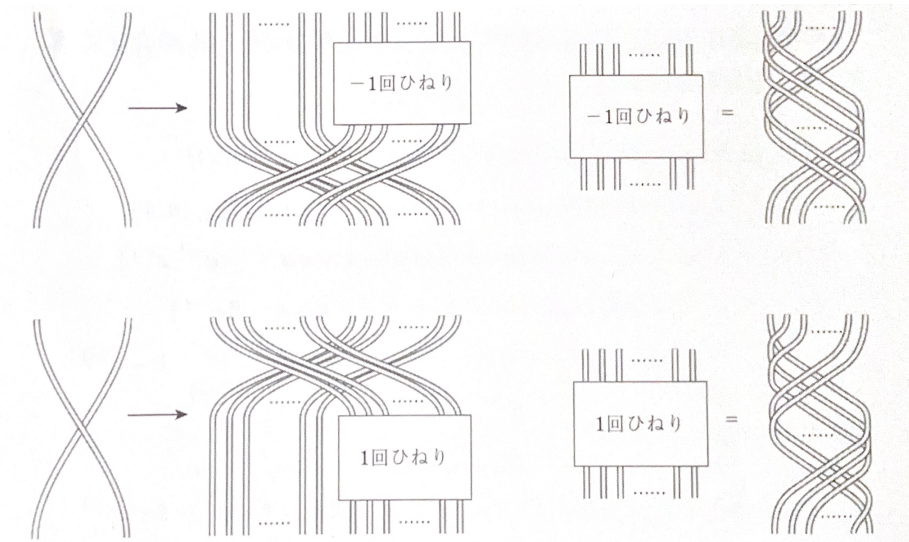
$$F_K(a,x) = a^{-w(K)}D_K(a,x)$$

: Kauffman 多項式

〈6. 平行化〉

Def.（射影図の平行化）

・射影図 K に対し，各紐を r 重にした上で下のようなひねりを加えた図を K の r 重平行化といい，$K^{(r)}$ で表す。



Thm. r 重平行化は結び目に対して well-defined である。

Def.（不変量の平行化）

結び目の不変量 f に対し，新たな不変量 $f^{(r)}$ を
$f^{(r)}(K)=f(K^{(r)})$ で定義し，f の r 重平行化という。

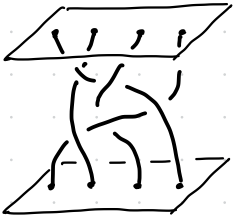
Obs.

・$f(K)=f(K')$ であっても，$f^{(r)}(K)=f^{(r)}(K')$ とは限らない。

・実際に $f=\nabla, \Delta, P, F$ で一致し $\nabla^{(2)}$ で区別できる例や，
さらに $\nabla^{(2)}, \Delta^{(2)}, P^{(2)}, F^{(2)}$ まで一致し $P^{(3)}$ で区別できる例がある。

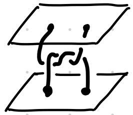
$\boxed{2}$ 組紐群と結び目

〈1. 組紐〉

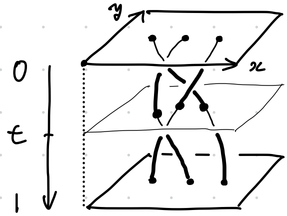


このようなものを組紐という。

注意：



これは組紐でない。
(ひもが下から上に上がるところがあるため)

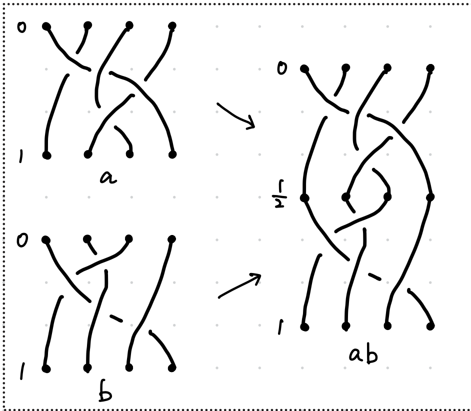


絡み目は、
$f_i: \{1, \cdots, n\} \times [0,1] \to \mathbb{R}^2$
かつ(条件)
のグラフと見てもよい。

Thm. (Artinの定理)

同値な組紐は、組紐であることを保ったまま互いに変形できる。

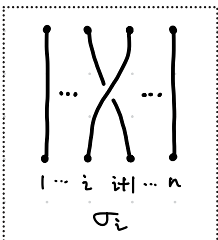
〈2. 群構造〉



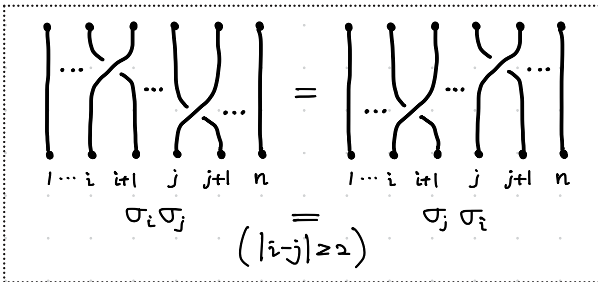
：n本の組紐どうしに積が定まり、群をなす。

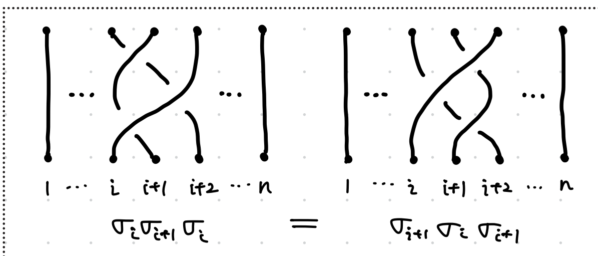
⟶ B_n とかき、組紐群 と呼ぶ。

構造を見る。



生成元





関係式

Fact.

$$B_n = \left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_n \;\middle|\; \begin{array}{l} \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1} \\ \sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i \quad (|i-j| \geq 2) \end{array} \right\rangle$$

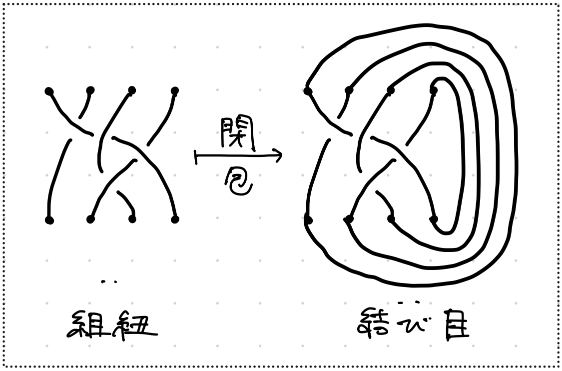
：無限群

$$S_n = \left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_n \;\middle|\; \begin{array}{l} \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1} \\ \sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i \quad (|i-j| \geq 2) \\ \sigma_i^2 = 1 \end{array} \right\rangle$$

n次対称群

：有限群

〈3. 組紐と結び目〉



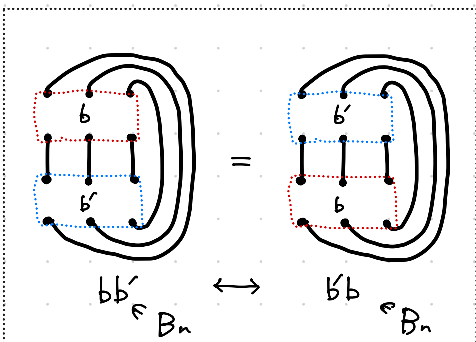
組紐の閉包

Thm. (Alexanderの定理)

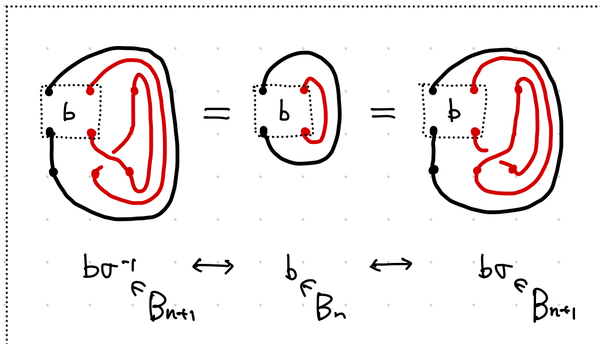
任意の結び目は、
ある組紐の閉包である。

i.e. $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \longrightarrow \{$結び目$\}$.

Q. 異なる2つの組紐の閉包が同値な結び目になるのはいつか？



変形 (MⅠ)



変形 (MⅡ)

Markov変形

Thm. (Markovの定理)

$\left.\begin{array}{l} b_1 \in B_{n_1} \\ b_2 \in B_{n_2} \end{array}\right)$ の閉包が同値な結び目になる

$\Longleftrightarrow$ b_1とb_2は有限回のMⅠ, MⅡで互いに変形できる。

$\rightsquigarrow$ 結び目の不変量 = Markov変形で不変な組紐の不変量.

〈幕間：overview〉

① 構造がよく分からない集合：

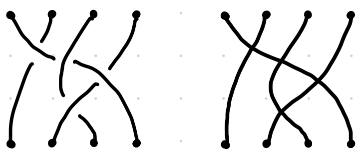
$$\begin{tikzcd}
\{\text{結び目}\} \arrow[rr, "\text{不変量}(V,\,\nabla,\,P,\,F,\,\dots)"] & & \mathbb{C} \\
\{\text{組紐}\} \arrow[u, "/\mathrm{MI},\mathrm{MII}"'] \arrow[rr, "\text{不変量}^{\mathrm{MI},\mathrm{MII}}"] \arrow[urr, phantom, "\Uparrow"] & & \mathbb{C} \\
B_n \arrow[u, phantom, "\cup\!\!\!\mid"] \arrow[r, "\text{表現}"] & GL(V) \arrow[ur, "\mathrm{Tr}"] \arrow[u, phantom, "\Uparrow"] &
\end{tikzcd}$$

群
代数的対象：

：指標

Bnの良い表現をどのように構成するか？

アイデア：Bnは、互換に"向き"をつけ非対称にしたSnである。



Bn　　Sn

! Snには"テンソル成分の入れ替え"による表現が存在する。(後述)

! これはSnの情報を多く持つ上手い表現。

! この構成を参考にしたい。

---

② Snの表現はどう構成されたか。

$V \otimes V \otimes \cdots \otimes V =: T^n(V)$.

・$S_n \overset{\pi_n}{\curvearrowright}$

(例)

$V \otimes V \otimes \cdots \otimes V$

：成分の置換 $\in \mathrm{Aut}(T^n(V))$.

Q. 表現の像は明示できるか？

・$V = \mathbb{C}^2$ とし、

$T^n(V)$には $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ の自然表現ρのn次テンソルρ^nの作用も入れる。

・π_nとρ^nの作用は可換なので、

$$\mathbb{C}[S_n] \xrightarrow{\tilde{\pi}_n} \mathrm{End}_{\mathcal{U}(\mathfrak{sl}_2)}(T^n(V))$$ がある。

・実はこれは全射。よって　A. π_nの像は ρ^nの"centralizer"である。

③ 例えば $\mathbb{C}[B_n] \longrightarrow \mathbb{C}[S_n] \xrightarrow{\tilde{\pi}_n} \mathrm{End}_{U(sl_2)}(T^n(V))$ はどうか？

⇝ これは情報を潰しすぎる。

∵ 組紐の交点の"向き"を完全に忘れた不変量しか出ない。

(指標は類関数なので、共役類の一致する組紐に同じ量が対応する。
S_nでの共役類とは軌道のコスウと長さなので、例えば結び目の成分数は出るかも。

④ "非可換テンソル"の概念が必要。 ⇝ 量子群 $U_q(sl_2)$.

⑤ $V \otimes V \otimes \cdots \otimes V = T^n(V)$.

◦ $B_n \overset{\pi_n}{\curvearrowright}$

$V \otimes V \otimes \cdots \otimes V$

：成分の非対称な入れかえ $\in \mathrm{Aut}(T^n(V))$.

Q. 表現の像は明示できるか？

◦ $V = \mathbb{C}^2$ とし、
$T^n(V)$には$U_q(sl_2(\mathbb{C}))$の自然表現ρの非可換n次テンソルρ^nも入る。

◦ π_nとρ^nの作用は可換なので（というより、むりやり可換にするので）、
$\mathbb{C}[B_n] \xrightarrow{\tilde{\pi}_n} \mathrm{End}_{U_q(sl_2)}(T^n(V))$ がある。 J_n : Jones環 という。

◦ 実はこれは全射。よって A. π_nの像はρ^nの"centralizer"である。

⑥

$$\begin{tikzcd}
\{\text{結び目}\} \arrow[rrr, bend left, "V_t\text{ : Jones多項式}"] & & & \mathbb{C} \\
\{\text{組紐}\} \arrow[u] \arrow[rr, phantom, "\text{少し調整すると可換。}"] & & t^{\frac{1}{2}} \updownarrow -q & \\
B_n \arrow[u, phantom, sloped, "\subset"] \arrow[r, "\pi_n"] & J_n = \mathrm{End}_{U_q(sl_2)}(T^n(V)) \arrow[urr, "tr_q\text{ : 量子化されたトレース。}"'] & &
\end{tikzcd}$$

⑦ 一般の$\mathfrak{g}$でのπ_nの構成は？ … 普遍R行列。

⑧ 自然表現以外に対応する不変量は？ …（例）不変量の平行化。

3 量子群

〈1. 量子群の定義〉

Def. (量子群)　$q \notin \mu(\mathbb{C})$.

$$\textcolor{red}{U_q(sl_2)} = \mathbb{C}\langle X^+, X^-, K, K^{-1}\rangle \Big/ \left(\begin{array}{l} KK^{-1} = K^{-1}K = 1 \\ KX^{\pm}K^{-1} = q^{\pm 2}X^{\pm} \\ X^+X^- - X^-X^+ = \dfrac{K-K^{-1}}{q-q^{-1}} \end{array} \right)$$

非可換多項式環.

Rmk. $q = e^{\varepsilon}$ とし. 形式的に $K = q^H = e^{\varepsilon H}$ と書くと.

- $KX^{\pm}K^{-1} - q^{\pm 2}X^{\pm}$

$$= \left(1 + \varepsilon H + \varepsilon^2 \frac{H^2}{2} + \cdots\right) X^{\pm} \left(1 - \varepsilon H + \varepsilon^2 \frac{H^2}{2} + \cdots\right) - \left(1 \pm 2\varepsilon \pm (2\varepsilon)^2 + \cdots\right) X^{\pm}$$

$e^{\pm 2\varepsilon}$

$$= \varepsilon\left(HX^{\pm} - X^{\pm}H \mp 2X^{\pm}\right) + O(\varepsilon^2)$$

- $(q - q^{-1})(X^+X^- - X^-X^+) - (K - K^{-1})$

$$= 2\varepsilon(X^+X^- - X^-X^+ - H) + O(\varepsilon^2)$$

から、$\varepsilon \to 0$ i.e. $q \to 1$ で

- $$U(sl_2) = \mathbb{C}\langle x, x^-, h\rangle \Big/ \left(\begin{array}{l} hx^{\pm} - x^{\pm}h = \pm 2x^{\pm} \\ x^+x^- - x^-x^+ = h \end{array} \right)$$

を回復する (?)

〈2. テンソル積表現〉

○ ふつうのテンソル積… ρ_1, ρ_2 を $\mathfrak{g}$ から V_1, V_2 への表現をするとき、

$$(\rho_1\otimes\rho_2)(x) = \rho_1(x)\otimes \mathrm{id}_{V_2} + \mathrm{id}_{V_1}\otimes\rho_2(x) \ : \ V_1\otimes V_2 \text{ への表現.}$$

これは $\forall x\in\mathfrak{g}$,

$$\begin{tikzcd}
V_1\otimes V_2 \arrow[r, "\phi"', "a\otimes b \mapsto b\otimes a" below] \arrow[d, "(\rho_1\otimes\rho_2)(x)"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & V_2\otimes V_1 \arrow[d, "(\rho_2\otimes\rho_1)(x)"] \\
V_1\otimes V_2 \arrow[r, "\phi"] & V_2\otimes V_1
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & \mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g} \arrow[d] & x\otimes y \arrow[d, mapsto] \\
\mathfrak{g} \arrow[ur, "\Delta"] \arrow[dr, "\Delta"'] \arrow[r, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g} & y\otimes x
\end{tikzcd} \quad (\text{余可換})$$

$$x \mapsto x\otimes 1 + 1\otimes x$$

Rmk.

$$\begin{tikzcd}
 & A\otimes A \arrow[dl] \\
A & A\otimes A \arrow[l] \arrow[u]
\end{tikzcd} \quad (\text{可換})$$

$$xy \longmapsfrom x\otimes y$$

Def. ($U_q(sl_2)$ の表現のテンソル積)

$U_q(sl_2) \xrightarrow{\rho_1} \mathrm{End}(V_1)$, $U_q(sl_2) \xrightarrow{\rho_2} \mathrm{End}(V_2)$ を表現とするとき.

$\rho_1\otimes\rho_2 : U_q(sl_2) \longrightarrow \mathrm{End}(V_1\otimes V_2)$ を以下で定める.

$$\begin{aligned}
K &\mapsto \rho_1(K)\otimes\rho_2(K) \\
;\quad X^+ &\mapsto \rho_1(X^+)\otimes\rho_2(K) + \mathrm{id}_{V_1}\otimes\rho_2(X^+) \\
X^- &\mapsto \rho_1(X^-)\otimes \mathrm{id}_{V_2} + \rho_1(K)^{-1}\otimes\rho_2(X^-)
\end{aligned}$$

Rmk.

$$\begin{tikzcd}
V_1\otimes V_2 \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "(\rho_1\otimes\rho_2)(x)"'] \arrow[dr, phantom, "\not\circlearrowleft"] & V_2\otimes V_1 \arrow[d, "(\rho_2\otimes\rho_1)(x)"] \\
V_1\otimes V_2 \arrow[r, "\phi"] & V_2\otimes V_1
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & U_q(sl_2)\otimes U_q(sl_2) \arrow[d] \\
U_q(sl_2) \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[r, phantom, "\not\circlearrowleft"] & U_q(sl_2)\otimes U_q(sl_2)
\end{tikzcd} \quad : \text{非余可換.}$$

$$K, X^+, X^- \longmapsto K\otimes K,\ X^+\otimes K + 1\otimes X^+,\ X^-\otimes 1 + K^{-1}\otimes X^-$$

〈3. R-行列の構成〉

- ふつうの成分入れ替え  $= (i\ i{+}1) \mapsto P_i \in \mathrm{End}_{\mathfrak{g}}(T^n(V))$ なら

$$\underset{|i-j|\geq 2}{P_iP_j = P_jP_i},\quad P_iP_{i+1}P_i = P_{i+1}P_iP_{i+1},\quad P_i^2 = \mathrm{id}.$$

具体的には、例えば $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ のとき

$$P : V\otimes V \longrightarrow V\otimes V$$

$$;\ x\otimes y \mapsto y\otimes x$$

を $i, i{+}1$ 成分に作用させるもの。

- 組紐群の表現  $= \sigma_i \mapsto R_i$ があるなら、

$\underset{|i-j|\geq 2}{R_iR_j = R_jR_i}$, $\underbrace{R_iR_{i+1}R_i = R_{i+1}R_iR_{i+1}}_{\text{Yang-Baxter 方程式}}$ が成立しなければならない。

Yang-Baxter 方程式をみたす $\{R_i\}$ を R行列 という。

Construction. ($U_q(\mathfrak{sl}_2)$ の自然表現に関する R行列) $V = \mathbb{C}^2$

$$R : V\otimes V \longrightarrow V\otimes V$$

$$;\ \begin{aligned} e_1\otimes e_1 &\mapsto q^{\frac{1}{2}}(e_1\otimes e_1) \\ e_1\otimes e_2 &\mapsto q^{-\frac{1}{2}}(e_2\otimes e_1) \\ e_2\otimes e_1 &\mapsto q^{-\frac{1}{2}}(e_1\otimes e_2) + (q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{3}{2}})(e_2\otimes e_1) \\ e_2\otimes e_2 &\mapsto q^{\frac{1}{2}}(e_2\otimes e_2) \end{aligned}$$

- これは Yang-Baxter 方程式をみたす。

- $\pi_n : \mathbb{C}[B_n] \to \mathrm{End}_{U_q(\mathfrak{sl}_2)}(T^n(V))$; $\sigma_i \mapsto$ [$i, i{+}1$ 成分に R で作用]

$\mathrm{End}_{U_q(\mathfrak{sl}_2)}(T^n(V)) = J_n$ Jones 環

これは実は surj.

〈4. 量子群とJones多項式〉

- $\mathrm{tr}_q^n : \mathrm{End}_{U_q(\mathfrak{sl}_2)}(T^n(V)) \longrightarrow \mathbb{C} \quad ; \quad x \longmapsto \mathrm{tr}(\rho_n(k)x)$

$k = q^{\varepsilon H}$ より $\varepsilon \to 0$ で $\mathrm{tr}_q^n(x) \longrightarrow \mathrm{tr}(x)$

- $w_n : B_n \longrightarrow \mathbb{Z} \quad ; \quad b \longmapsto$ (正の交点数) $-$ (負の交点数)

Thm. (量子群とJones多項式) $b \in B_n$ と閉包 $\hat{b}$ に対し

$$q^{-\frac{3}{2}w(b)}\,\mathrm{tr}_q^n(\pi_n(b)) = (q+q^{-1})\,V_{\hat{b}}(t)\Big|_{t^{\frac{1}{2}}=-q}$$

$$\begin{tikzcd}
\{\text{結び目}\} \arrow[rrr, bend left, "V_t\,:\,\text{Jones多項式}"] & & & \mathbb{C} \\
\{\text{組紐}\} \arrow[u] \arrow[r, phantom, "\text{少し調整すると可換.}"] & & t^{\frac{1}{2}} \leftrightarrow -q & \\
B_n \arrow[u, phantom, "\cup" description] \arrow[r, "\pi_n"] & J_n = \mathrm{End}_{U_q(\mathfrak{sl}_2)}(T^n(V)) \arrow[urr, "\mathrm{tr}_q"'] & &
\end{tikzcd}$$

とりかえられそうなパラメータがたくさんある。

〈5. 普遍R行列〉

- 一般に、Kac-Moody Lie代数 $\mathfrak{g}$ の包絡環に対し、量子群 $U_q(\mathfrak{g})$ を考えられる。
- また自然表現でなくとも、$\mathrm{End}_{U_q(\mathfrak{g})}(T^n(V))$ は Yang-Baxter方程式の解を持ちうる。

……統一的な"解の公式"を **普遍R行列** という。

ここでは $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ に絞って説明する。

アイデア： 表現 $\rho : U_q(\mathfrak{sl}_2) \longrightarrow \mathrm{End}(V)$ に対して、

表現 $B_n \longrightarrow \mathrm{End}_{\rho(U_q(\mathfrak{sl}_2))}(T^n(V))$ をつくりたい。

$$\sigma_i \in B_n \;\longmapsto\; \Big(T^n(V) = \underbrace{V \otimes V}_{\text{ここへの作用}} \otimes \cdots \otimes V \Big)$$

$$U_q(\mathfrak{sl}_2) \xrightarrow{\;\Delta\;} U_q(\mathfrak{sl}_2) \otimes U_q(\mathfrak{sl}_2) \xrightarrow{\;\rho\otimes\rho\;} \mathrm{End}(T^2(V))$$

② ここに何か ρ 非依存な元 $\Leftarrow$ ① $\rho\otimes\rho\circ\Delta$ の像（ρ依存）と可換な ここの元 がほしい。

R を構成して。 $\quad R \xmapsto{\;\rho\otimes\rho\;} (\rho\otimes\rho)(R)$

$\Longrightarrow$ ③ が Yang-Baxterをみたすようにできるか？

Construction.（普遍R行列）

$q^H = K$

$$R^u = q^{\frac{1}{2}H\otimes H} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(q-q^{-1})^n}{[n]!}\, q^{\frac{(n-1)n}{2}} (X_+^n \otimes X_-^n) \;\in U_q(\mathfrak{sl}_2) \otimes U_q(\mathfrak{sl}_2)$$

を、$U_q(\mathfrak{sl}_2)$ の **普遍R行列** という。

Recall.

$$\begin{tikzcd} & U_q(\mathfrak{sl}_2)\otimes U_q(\mathfrak{sl}_2) \arrow[d, equal] \\ U_q(\mathfrak{sl}_2) \arrow[ur, "\Delta"] \arrow[dr, "\phi\circ\Delta"'] & \\ & U_q(\mathfrak{sl}_2)\otimes U_q(\mathfrak{sl}_2) \end{tikzcd}$$

は可換でない。同型ではある。

Prop.

$$\begin{tikzcd} & U_q(\mathfrak{sl}_2)\otimes U_q(\mathfrak{sl}_2) \arrow[r, "R^u\cdot -"] & U_q(\mathfrak{sl}_2)\otimes U_q(\mathfrak{sl}_2) \arrow[d, equal] \\ U_q(\mathfrak{sl}_2) \arrow[ur, "\Delta"] \arrow[dr, "\phi\circ\Delta"'] & & \\ & U_q(\mathfrak{sl}_2)\otimes U_q(\mathfrak{sl}_2) \arrow[r, "-\cdot R^u"'] & U_q(\mathfrak{sl}_2)\otimes U_q(\mathfrak{sl}_2) \end{tikzcd}$$

可換.

Prop.

Rにより1,3成分に作用

$$(\Delta\otimes \mathrm{id})(R^u) = R^u_{13}R^u_{23}$$

$$(\mathrm{id}\otimes \Delta)(R^u) = R^u_{12}R^u_{13}$$

三角関係式

Thm. (組紐関係式)

$\check{R}^u_i := P_i R^u_i$ とするとき

$$\check{R}^u_i \check{R}^u_{i+1} \check{R}^u_i = \check{R}^u_{i+1} \check{R}^u_i \check{R}^u_{i+1}$$